Mühazirə 1

METRİK FƏZALAR

1. Tutaq ki, X boş olmayan çoxluqdur. Əgər aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi ilə hər bir nizamlanmış $x, y \in X$ elementlər cütünə mənfi olmayan $\rho(x, y)$ ədədi qarşı qoyulmuşdursa, bu halda deyirlər ki, X çoxluğu üzərində ρ *metrikası* verilmişdir:

1) yalnız və yalnız $x = y$ olduqda $\rho(x, y) = 0;$

2) ixtiyari $x, y \in X$ üçün $\rho(x, y) = \rho(y, x);$

3) ixtiyari $x, y, z \in X$ üçün $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z).$

Əgər R_+ ilə mənfi olmayan həqiqi ədədlər çoxluğu işarə olunarsa, onda X çoxluğu üzərində metrikanın 1-3 xassələrini ödəyən $\rho : X \times X \to R_+$ inikası olduğunu söyləyə bilərik.

X çoxluğu üzərində verilən metrika ilə birlikdə, yəni (X, ρ) cütü *metrik fəza,* X çoxluğunun $x, y, ..., z, ...$ elementləri isə bu fəzanın *nöqtələri* adlanır. Mənfi olmayan $\rho(x, y)$ ədədi x, y nöqtələri arasındakı *məsafə* adlanır. ρ funksiyasının ödədi-yi 1-3 xassələrinə *metrik fəza aksiomları* deyilir: 1 xassəsi eynilik aksiomu, 2 xassəsi simmetriya aksiomu, 3 xassəsi isə üçbucaq aksiomu (və ya üçbucaq bərabərsizliyi adlanır. Anlaşılmazlıq yaranmadığı halda, qısa olmasından ötrü metrik fəzanı sadəcə X ilə işarə edəcəyik.

Boş olmayan istənilən X çoxluğu üzərində $x, y \in X$ üçün

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

qəbul etməklə *trivial*, yaxud *simplektik* metrika adlandırılan metrika təyin oluna bilər. Aydındır ki, metrikanın bu şəkildə təyin olunması zamanı 1-3 aksiomları ödənilir. Beləliklə, sıfırdan fərqli istənilən çoxluğu metrik fəzaya çevirmək olar. Qeyd edək ki, birdən çox nöqtəyə malik olan eyni bir çoxluq üzərində müxtəlif metrikalar verilə bilər. Doğrudan da, əgər ρ belə bir çoxluq üzərində verilmiş metrika və k isə vahiddən fərqli müsbət ədəddirsə, onda $k\rho$ funksiyası da bu çoxluq üzərində metrikadır və bu metrika ρ metrikasından fərqlidir.

Metrik fəzalara dair nümunələrə baxaq.

Misal 1. E_n Evklid fəzası üçün ($n = 1,2,...$) aşağıdakı qayda ilə $\rho : E_n \times E_n \to R_+$ inikasını təyin edək:

$$\forall M, N \in E_n \text{ nöqtələri üçün } \rho(M,N) = \left|\overrightarrow{MN}\right|,$$

(I mühazirənin 5-ci bəndində E_n Evklid fəzasının ixtiyari iki nöqtəsi arasındakı məsafə məhz bu şəkildə təyin olunmuşdu). Daxil etdiyimiz $\rho(x,y)$ funksiyası metrik fəza aksiomlarını ödəyir. Deməli, E_n Evklid fəzası metrik fəzadır.

Misal 2. Tutaq ki, $X - [a,b]$ parçasıdır, yəni

$$[a,b] = \{x | x \in R, a \le x \le b\}.$$

x və y nöqtələri arasındakı məsafə $\rho(x,y) = |y - x|$ düsturu ilə təyin olunur. Bu halda metrik fəzanın 1 və 2 aksiomlarının ödənilməsi aşkardır. 3 aksiomunun ödənildiyini yoxlayaq. Əgər x_1, x_2 və x_3 - X çoxluğundan olan ixtiyari üç nöqtədirsə (yəni $[a,b]$ parçasına aid olan üç ədəddirsə), onda aydındır ki, $|x_1 - x_3| = |(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)| \le |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$. Beləliklə,

$$\rho(x_1, x_3) \le \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3).$$

Misal 3. $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan bütün həqiqi funsiyaların X çoxluğunda məsafəni $\rho(f,g) = \sup|f(x) - g(x)|$ düsturu ilə təyin edirik, burada $x \in [a,b]$. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, ρ funksiyası metrika aksiomlarını ödəyir. Bu metrik fəza
$C_{[a,b]}$ ilə işarə olunur və daha çox riyazi analiz kursunda istifadə edilir.

2. Tutaq ki, (X,ρ)-metrik fəzadır, $Y \subset X$ onun müəyyən alt çoxluğudur. ρ metrikası ilə Y çoxluğu da metrik fəzaya çevrilir. (Y,ρ) metrik fəzası X

fəzasının *alt fəzası* adlanır. Tutaq ki, $Y \subset X$ -metrik fəzanın ixtiyari alt çoxluğudur. $\{\rho(x,y)|x,y \in Y\}$ çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddini nəzərdən keçirək. Əgər bu dəqiq yuxarı sərhəd sonludursa: $d = \sup\limits_{x,y\in Y}\{\rho(x,y)\}$, onda Y *məhdud* çoxluq, $d - Y$ çoxluğunun *diametri* adlanır.

$x \in X$ *mərkəzli* ε *radiuslu kürəvi ətraf*

$$O_\varepsilon(x) = \{y|\, y \in X, \rho(x,y) < \varepsilon\}$$

çoxluğuna deyilir.

$Y_1, Y_2 \subset X$ *çoxluqları arasındakı məsafə* dedikdə

$$\rho(Y_1, Y_2) = \inf_{x\in X, y\in Y}\{\rho(x,y)\}$$

ədədi başa düşülür. Əgər Y_1 və Y_2 çoxluqlarının ortaq nöqtəsi vardırsa, onda $\rho(Y_1, Y_2) = 0.$

$\rho(x,Y) = 0$ şərtini ödəyən istənilən x nöqtəsi Y çoxluğu-nun *toxunma nöqtəsi* adlanır. Aşkardır ki, Y çoxluğunun hər bir x nöqtəsi onun toxunma nöqtəsidir. Hökmün tərsi ümumiyyətlə doğru deyil. Məsələn, $(a,b) \subset R$ intervalı üçün a və b nöqtələri toxunma nöqtələri olsalar da, bunlar (a,b) intervalına aid olmayan nöqtələrdir.

Y çoxluğunun bütün toxunma nöqtələri çoxluğu onun *qapanması* adlanır və $\bar{Y}$ ilə işarə olunur. Aşkardır ki, $Y \subset \bar{Y},$ lakin tərsi ümumiyyətlə doğru deyil. Yuxarıda baxdığımız (a,b) intervalı misalında bu çoxluğun qapanması $[a,b]$ parçasıdır.

Metrik fəzanın Y alt çoxluğu özünün qapanması ilə üst-üstə düşdükdə, yəni $Y = \bar{Y}$ şərtini ödədikdə *qapalı çoxluq* adlanır.

Əgər $x \in Y$ nöqtəsinin bu çoxluğa daxil olan müəyyən $O_\varepsilon(x)$ kürəvi ətrafı vardırsa, bu nöqtəyə Y çoxluğunun *daxili nöqtəsi* deyilir. Y çoxluğunun bütün daxili nöqtələri çoxluğu onun *daxili hissəsi* adlanır və $IntY$ ilə işarə olunur. Y çoxluğu özünün daxili hissəsi ilə üst-üstə düşdükdə, yəni $Y = IntY$ şərtini ödədikdə *açıq çoxluq* adlanır.

Teorem 1. *Tutaq ki, $X-$metrik fəzadır. $Y \subset X$ çoxluğu yalnız və yalnız $X \setminus Y$ tamamlayıcı çoxluğu açıq olduqda qapalıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, Y -qapalı çoxluqdur, $Y=\overline{Y}$ və $x \in X \setminus Y$. Bu o deməkdir ki, x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsi deyil, yəni $\rho(x,Y)=\varepsilon>0.$ Göstərək ki, $O_\varepsilon(x) \subset X \setminus Y$. Doğrudan da, ixtiyari $y \in O_\varepsilon(x)$ nöqtəsi üçün $\rho(x,y)<\varepsilon.$ Əgər $y \in Y$ olduğunu fərz etsək, $\rho(x,y) \geq \rho(x,Y),$ yəni $\rho(x,y) \geq \varepsilon$ münasibətini alarıq, bu isə şərtə ziddir. Beləliklə, $X \setminus Y$ açıq çoxluqdur.

Tərsinə, tutaq ki, $X \setminus Y$-açıq çoxluqdur. Onda ixtiyari $x \in X \setminus Y$ nöqtəsinin $X \setminus Y$ çoxluğuna daxil olan $O_\varepsilon(x)$ kürəvi ətrafı vardır. Bu onu göstərir ki, $y \in Y$ nöqtəsi üçün $\rho(x,y) \geq \varepsilon$, yəni $\rho(x,Y) \geq \varepsilon.$ Buradan alınır ki, x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsi deyil. Beləliklə, əgər $x \in \overline{Y}$ olarsa, onda $x \notin X \setminus Y,$ yəni $x \in Y.$ ■ Bu o deməkdir ki, $\overline{Y} \subset Y,$ yəni $Y=\overline{Y}.$ Deməli, Y qapalı çoxluqdur.

Mühazirə 2

TOPOLOJİ FƏZALAR

1. Metrik fəzada açıq çoxluqların IV mühazirədə ifadə olunan xassələrinə (teorem 2) əsaslanaraq, topoloji fəza anlayışını daxil edək.

Tutaq ki, X çoxluğunda müəyyən qayda ilə aşağıdakı xassələrə malik olan τ alt çoxluqlar sistemi seçilmişdir:

I. $\varnothing$ boş çoxluğu və X çoxluğunun özü τ sisteminə daxildirlər.

II. τ sistemindən olan alt çoxluqların istənilən ailəsinin birləşməsi τ sisteminə daxildir.

III. τ sistemindən olan alt çoxluqların istənilən sonlu ailəsinin kəsişməsi τ sisteminə daxildir.

Bu halda deyirlər ki, X çoxluğu üzərində *topoloji struktur* (və ya *topologiya*) təyin olunmuşdur. (X,τ) cütünü isə *topoloji fəza* adlandırırlar. I,II,III xassələrinə *topoloji struktur aksiomları* deyilir.

X çoxluğunun elementləri (X,τ) topoloji fəzasının *nöqtələri*, τ sistemindən olan elementlər isə bu fəzanın *açıq çoxluqları* adlanır. Əgər X çoxluğu üzərində hansı τ topologiyasının seçildiyi artıq məlumdursa, onda (X,τ) topoloji fəzasını X ilə də işarə edirlər.

Topoloji fəzalara dair nümunələrə baxaq.

Misal 1. (X,ρ) metrik fəzasını nəzərdən keçirək. IV mühazirədə verilən teorem 2-dən müəyyən edirik ki, (X,ρ) metrik fəzası topoloji fəzadır. Bu topoloji fəzanın τ topologiyası açıq kürələrin köməyi ilə verilir (IV mühazirədə, bənd 2-də (X,ρ) fəzasında açıq çoxluğun tərifinə baxın) və ρ metrikasının *doğurduğu* topologiya adlanır.

Misal 2. R^n arifmetik fəzasında açıq çoxluq anlayışını bu şəkildə daxil etmək olar. n sayda $\left(a^i, b^i\right)(i = 1,2,...,n)$ intervallarını götürək. $a^i < x^i < b^i$ $(i = 1,2,...,n)$ şərtini ödəyən bütün $M\left(x^1, x^2,..., x^n\right)$ nöqtələri çoxluğunu açıq koordinat paralelepipedi adlandıraq.

Əgər $F \subset R^n$ çoxluğu hər bir nöqtəsi ilə bərabər öu nöqtəni özündə saxlayan müəyyən açıq koordinat parale-lepipedini də özündə saxlayırsa, onda bu çoxluğu açıq çoxluq adlandırırıq. $\varnothing$ çoxluğu açıq çoxluq qəbul edirik. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, bu qayda ilə təyin edilən bütün açıq çoxluqlar ailəsi topoloji strukturun I,II və III aksiomlarını ödəyir və deməli, R^n çoxluğu üzərində müəyyən topologiya təyin edir. Bu topologiyanı *təbii topologiya* adlandırırlar. Təbii topologiya R^n çoxluğunu topoloji fəzaya çevirir. Bu topoloji fəza *ədədi fəza* ($n = 1$ olduqda *ədəd düz xətti*) adlanır.

Misal 3. A_2 afin müstəvisində $ABCD = P$ paraleloqra-mına baxaq. $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AD}, 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1$ şərtini ödəyən bütün M nöqtələrinin $\overset{\circ}{P}$ çoxluğu P paraleloqramının daxili hissəsi adlanır. Əgər $F \subset A_2$ çoxluğunu hər bir nöqtəsi ilə bərabər bu nöqtəni özündə saxlayan müəyyən paraleloqramın daxili hissəsini də özündə saxlayırsa, onda bu çoxluğu açıq çoxluq adlandıraq. Tərifə görə hər bir $M \in F$ nöqtəsi üçün elə P paraleloqramı vardır ki, onun $\overset{\circ}{P}$ daxili hissəsi $M \in \overset{\circ}{P} \subset F$ şərtini ödəyir.

Yoxlamaq olur ki, bu qayda ilə A_2 müstəvisində təyin edilən açıq çoxluqların τ ailəsi topoloji strukturun I,II və III aksiomlarını ödəyir. Beləliklə, afin müstəvi topoloji fəzadır. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, A_n afin fəzası topoloji fəzadır.

Misal 4. İxtiyari X çoxluğunda bu X çoxluğunun özündən və $\varnothing$ boş çoxluğundan ibarət olan $\tau = \{X, \varnothing\}$ ailəsinə baxaq. Aşkardır ki, alt çoxluqların τ ailəsi I,II və III aksiom-larını ödəyir, yəni τ - X çoxluğunda təyin edilmiş topologiyadır. Bu topologiya *antidiskret* (və ya *trivial*) *topologiya*, (X, τ) fəzası isə *antidiskret topoloji fəza* adlanır.

Misal 5. Tutaq ki, X -ixtiyari çoxluqdur, $\tau = P(X)$ isə X çoxluğunun bütün alt çoxluqları ailəsidir. I, II,III aksiom-larının ödənilməsi aşkardır. Bu topologiya *diskret topologiya*, (X, τ) fəzası isə *diskret topoloji fəza* adlanır.

4,5 misalları göstərirlər ki, istənilən X çoxluğunu topo-loji fəzaya çevirmək olar.

2. Tutaq ki, (X, τ) -topoloji fəzadır. X topoloji fəza-sında açıq çoxluqların tamamlayıcılarına *qapalı çoxluqlar* deyilir. Aşkardır ki, X topoloji fəzasında qapalı çoxluqlar üçün aşağıdakı ikili xassələr doğrudur:

I'. $\varnothing$ boş çoxluğu və X çoxluğunun özü qapalı çoxluqlardır.

II'. Qapalı çoxluqların ixtiyari ailəsinin kəsişməsi qapalı çoxluqdur.

III'. Qapalı çoxluqların ixtiyari sonlu ailəsinin birləşməsi qapalı çoxluqdur.

Bu xassələrin doğruluğu mühazirə 4-də verilən De-Morqan düsturlarından bilavasitə alınır.

Beləliklə, X çoxluğu üzərində topologiyanın verilməsi üçün açıq çoxluqlar ailəsi əvəzinə I', II', III' şərtlərini ödəyən çoxluqlar ailəsini təyin etmək və bu çoxluqları qapalı çoxluqlar adlandırmaq olar.

Topoloji fəzalarda metrik fəzalara aid olan bir sıra mühüm anlayışları daxil etmək mümkündür. X topoloji fəzasının x *nöqtəsinin ətrafı* bu nöqtəni özündə saxlayan ixtiyari açıq çoxluğa deyilir. Analogiyaya görə, Y alt çoxluğunu özündə saxlayan açıq çoxluq Y *çoxluğunun ətrafı* adlanır. $Y \subset X$ çoxluğunun *toxunma nöqtəsi* elə x nöqtəsinə deyilir ki, bu nöqtənin hər bir ətrafı Y çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir. Y çoxluğunun bütün toxunma nöqtələri çoxluğu Y çoxluğunun *qapanması* adlanır və $\overline{Y}$ ilə işarə olunur. Y çoxluğu-nun *daxili nöqtəsi* elə $x \in Y$ nöqtəsinə deyilir ki, bu nöqtənin Y çoxluğuna daxil olan müəyyən ətrafı vardır. Y çoxluğunun bütün toxunma nöqtələri çoxluğu Y çoxluğunun *daxili hissəsi* adlanır və $IntY$ ilə işarə olunur.

Teorem 1. *$Y \subset X$ çoxluğu yalnız və yalnız $Y = \overline{Y}$ olduqda qapalıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, Y – qapalı çoxluqdur, yəni $X \setminus Y$ – açıq çoxluqdur. Onda $X \setminus Y$ çoxluğu özünün ixtiyari nöqtəsinin ətrafıdır, yəni $X \setminus Y$ çoxluğunun nöqtələri Y çoxluğunun toxunma nöqtələri olmurlar. Ona görə də $\overline{Y} \subset Y$. Digər tərəfdən, $Y \subset \overline{Y}$ olması aşkardır. Beləliklə, $Y = \overline{Y}$.

Tərsinə, tutaq ki, $Y = \overline{Y}$. Bu o deməkdir ki, əgər $x \notin Y$ olarsa, onda x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsi deyil, yəni onun müəyyən U_x ətrafı Y çoxluğu ilə kəsişmir: $U_x \subset X \setminus Y$. Buradan alınır ki, $X \setminus Y$ çoxluğu U_x açıq çoxluqlarının birləşməsi şəklində göstərilə bilər:

$$X \setminus Y = \bigcup_{x \in X \setminus Y} U_x \,. \tag{1}$$

(1) bərabərliyindən II topologiya aksiomuna əsasən alırıq ki, $X \setminus Y$ - açıq çoxluqdur.

Teorem 2. *X to[redacted]oloji fəzasının ixtiyari Y çoxluğunun $\overline{Y}$ qapanması qapalı çoxluqdur.*

İsbatı. Teorem 1-ə əsasən, $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ bərabərliyinin doğrulu-ğunu göstərmək yetərlidir. $\overline{Y} \subset \overline{\overline{Y}}$ olması aşkardır. $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$ tərs daxil olmasının doğru olduğunu əsaslandıraq. Tutaq ki, $x \in \overline{\overline{Y}}$. Bu o deməkdir ki, x nöqtəsinin ixtiyari U ətrafı $\overline{Y}$ çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir: $U \cap \overline{Y} \neq \varnothing$. Fərz edək ki, $y \in U \cap \overline{Y}$. Onda U çoxluğu y nöqtəsinin ətrafıdır. Digər tərəfdən, $y \in \overline{Y}$ olduğundan, U çoxluğu Y çoxluğu ilə boş olmayan kəsişməyə malikdir. Beləliklə, x nöqtəsi Y çoxluğunun toxunma nöqtəsidir, yəni $x \in \overline{Y}$. Buradan $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$ daxil olması və
$\overline{Y} \subset \overline{\overline{Y}}$ şərti daxilində $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ bərabərliyi alınır. ■

Mühazirə 3

KƏSİLMƏZ İNİKASLAR. HOMEOMORFİZM

Riyazi analiz kursunda ədədi arqumentli kəsilməz funksiyalar mühüm rol oynayırlar. Bu funksiyaların ümumi-ləşməsi həndəsədə əhəmiyyətli yeri olan kəsilməz inikaslardır.

1. Tutaq ki, (X,τ) və (Y,T) – topoloji fəzalardır. Bu topoloji fəzaların $f : X \to Y$ inikasına baxaq. Əgər $f(x_0) \in Y$ nöqtəsinin ixtiyari V ətrafı üçün $x_0 \in X$ nöqtəsinin $f(U) \subset Y$ şərtini ödəyən U ətrafı vardırsa, onda deyirlər ki, f inikası $x_0 \in X$ *nöqtəsində kəsilməzdir*. f inikası X fəzasının hər bir nöqtəsində kəsilməz olduqda ona *kəsilməz inikas* deyilir. Qeyd edək ki, X və Y fəzaları R ədəd düz xətti ilə üst-üstə düşdükdə kəsilməz inikasın tərifi $f(x)$ funksiyasının kəsilməzliyinin riyazi analiz kursundan məlum olan tərifi ilə eyniləşir.

Aşağıdakı teorem inikasın kəsilməzlik əlamətini ifadə edir.

Teorem 1. *$f : X \to Y$ inikası yalnız və yalnız aşağıdakı ekvivalent şərtlərdən biri ödənildikdə kəsilməzdir*:

$a)$ Y fəzasından olan ixtiyari açıq çoxluğun proobrazı X fəzasında açıq çoxluqdur;

$b)$ Y fəzasından olan ixtiyari qapalı çoxluğun proobrazı X fəzasında qapalı çoxluqdur.

İsbatı. Proobrazlar üçün $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ müna-sibəti ödənildiyindən, $a)$ və $b)$ şərtləri ekvivalentdir. Fərz edək ki, $f-$ kəsilməz inikasdır, $V \subset Y-$açıq çoxluqdur. Göstərək ki, V çoxluğunun $f^{-1}(V)$ proobrazı açıq çoxluqdur. Tutaq ki, $x \in X$, onda $f(x) \in V$, yəni V açıq çoxluğu $f(x)$ nöqtəsinin ətrafıdır. Onda f inikasının kəsilməzliyinin tərifinə əsasən x nöqtəsinin elə U ətrafı vardır ki, $f(U) \subset Y$, yaxud $U \subset f^{-1}(V)$. Sonuncu münasibət $f^{-1}(V)$ çoxluğunun açıq çoxluq olduğunu göstərir. Tərsinə: tutaq ki, $a)$ şərti ödənilir. İsbat edək ki, f inikası X fəzasının hər bir nöqtəsində kəsilməzdir. Hər hansı $x \in X$ nöqtəsini götürək və $f(x)$ nöqtəsinin ixtiyari V ətrafına baxaq. Şərtə görə V çoxluğunun U proobrazı $X-$də açıq çoxluqdur. Beləliklə, $x \in U$ və $f(U) \subset V$, yəni $f(x)$ nöqtəsinin ixtiyari V ətrafı üçün x nöqtəsinin $f(U) \subset Y$ şərtini ödəyən U ətrafı vardır. Tərifə görə bu, f inikasının x nöqtəsində kəsilməz olması deməkdir. ■

Kəsilməz inikaslara dair nümunələrə baxaq.

Misal 1. İxtiyari X topoloji fəzasının özünün özünə *eynilik inikası* kəsilməzdir. Bu inikas Id_X kimi işarə olunur:

$$Id_X : X \to X, \quad x \mapsto x.$$

Misal 2. Sabit inikas həmişə kəsilməzdir. Tutaq ki, $X, Y-$topoloji fəzalardır, $y_0 \in Y-$müəyyən nöqtədir, f isə sabit inikasdır:

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto y_0.$$

Onda ixtiyari $U \subset Y$ açıq çoxluğunun proobrazı, $y_0 \in U$ olduqda X fəzası ilə üst-üstə düşür və əks halda $\varnothing$ olur.

Misal 3. Diskret topoloji fəzanın hər hansı topoloji fəzaya ixtiyari inikası kəsilməzdir.

Misal 4. İxtiyari topoloji fəzanın antidiskret fəzaya istənilən inikası kəsilməz inikasdır.

Teorem 2. *Kəsilməz inikasların kompozisiyası kəsilməzdir.*

İsbatı. Göstərək ki, əgər $X, Y, Z -$topoloji fəzalardırsa və $f : X \to Y$ və $g : Y \to Z$ -kəsilməz inikaslardırsa, onda bu inikasların $g \circ f : X \to Z$ kompozisiyası kəsilməzdir. $h = g \circ f$ işarə edək. Tutaq ki, $U \subset Z$ -ixtiyari açıq çoxluqdur. g kəsilməz inikas olduğundan, $g^{-1}(U)$ çoxluğu $Y -$də açıqdır. $g^{-1}(U)$ çoxluğunun $f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ proobrazı isə f inikasının kəsilməzli-yinə görə $X -$də açıqdır. $h^{-1}(U) = f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ olduğundan buradan h kompozisiya inikasının kəsilməz olması alınır.

2. X topoloji fəzasının Y topoloji fəzasına $f : X \to Y$ inikasına baxaq. Əgər f inikası qarşılıqlı birqiymətli və qarşılıqlı kəsilməzdirsə, onda deyirlər ki, f *homeomorfizmdir.* Bu o deməkdir ki, f inikası iki şərti ödəyir: 1) $f -$biyeksiyadır; 2) f və f^{-1} $-$kəsilməz inikaslardır. Əgər $f : X \to Y$ homeomorfizmi vardırsa, bu halda X və Y fəzaları *homeomorf* fəzalar adlanır və $X \cong Y$, yaxud $X \cong_f Y$ yazılır.

İnikasın kəsilməzliyinidən və qarşılıqlı birqiymətliliyindən tərs inikasın kəsilməzliyi həmişə alınmır. Məsələn, $X = \{a, b\}$ və $Y = \{c, d\}$ ikinöqtəli topoloji fəzalalarına baxaq. Əgər X fəzası diskret, Y fəzası isə antidiskret fəzadırsa, onda $f : X \to Y$, $a \mapsto c, b \mapsto d$ inikası kəsilməz və biyektiv inikasdır. Lakin bu inikasın tərsi kəsilməz deyil.

Homeomorfizmlərə dair nümunələr göstərək.

Misal 5. Diskret fəzanın diskret fəzaya biyektiv inikası homeomorfizmdir. Bu aşkardır.

Misal 6. Antidiskret fəzanın antidiskret fəzaya biyektiv inikası homeomorfizmdir.

Homeomorfizmlərin sadə, lakin çox mühüm olan xassələrini qeyd edək.

Teorem 3. *a) İxtiyari topoloji fəzanın özünün özünə eynilik inikası homeomorfizmdir.*

b) Homeomorfizmin tərsi olan inikas homeomorfizmdir.

c) İki homeomorfizmin kompozisiyası homeomorfizmdir.

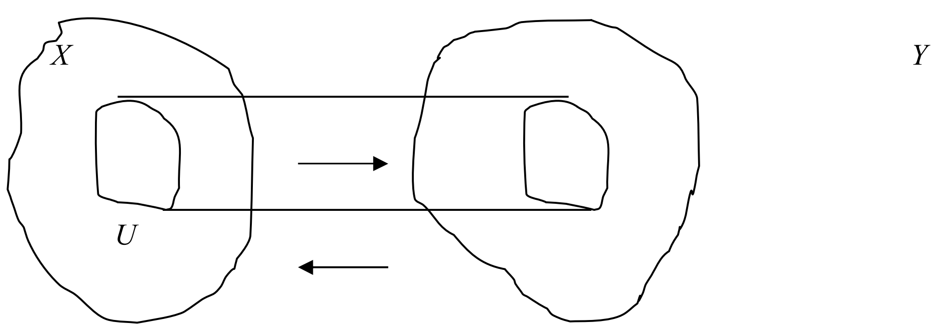
İsbatı. $a)$ və $b)$ hökmləri aşkardır. $c)$ hökmünün doğruluğunu isbat edək. Tutaq ki, $f : X \to Y$ və $g : Y \to Z -$homeomorfizmlərdir. Onda $h = g \circ f : X \to Z$ kompozisiya inikası f və g inikaslarının kəsilməzliyinə görə kəsilməzdir (bax teorem 2). f və g biyektiv inikaslar olduqlarından, h inikası biyeksiyadır. Digər tərəfdən, f^{-1} və g^{-1} inikasları kəsilməz olduqlarından,

$$h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$$

tərs inikası kəsilməzdir. Beləliklə, h inikası homeomorfizmdir. ■

Teorem 4. *Homeomorfizm zamanı ixtiyari açıq çoxluğun obrazı açıq çoxluqdur, ixtiyari qapalı çoxluğun obrazı isə qapalı çoxluqdur.*

İsbatı. Tutaq ki, $f : X \to Y$-homeomorfizmdir, $g = f^{-1} : Y \to X -$tərs inikasdır və $U \subset X -$açıq çoxluqdur. Onda $f(U) = g^{-1}(U)$ çoxluğu g inikasının kəsilməzliyinə görə açıq çoxluqdur (şək. 1).



g

Şəkil 1

Qapalı çoxluğun proobrazının qapalı olması oxşar şəkildə əsaslandırılır.

Teorem 4-dən məlum olur ki, $f: X \to Y$ *homeomorfizmi* X *və* Y *topoloji fəzalarının topoloji strukturları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin edir.* Beləliklə, topoloji nöqteyi-nəzərdən homeomorf fəzalar tamamilə eyni şəkildə qurulmuşdurlar və $X \to Y$ homeomorfizmi X və Y fəzalarında topoloji struktur terminlərində təyin olunan bütün xassələri eyniləşdirir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 5. *Homeomorfluq münasibəti ekvivalentlik münasibətidir.* Bundan ötrü ekvivalentlik münasibətinin tərifinə aid olan üç xassənin ödənildiyini yoxlamaq lazımdır:

$a)$ R e f l e k s i v l i k. Hər bir topoloji fəza özü-özünə homeomorfdur:

$$X \cong X.$$

$b)$ S i m m e t r i k l i k. Əgər X fəzası Y fəzasına homeomorfdursa, onda Y fəzası da X fəzasına homeomorfdur:

$$X \cong Y \Rightarrow Y \cong X.$$

$c)$ T r a n z i t i v l i k. Əgər X fəzası Y fəzasına, Y fəzası isə Z fəzasına homeomorfdursa, onda X fəzası Z fəzasına homeomorfdur:

$$X \cong Y, Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z.$$

İsbatı. Müvafiq homeorfizmləri göstərmək kifayətdir. $a)$ halında bu Id_X eynilik inikasıdır. $b)$ halında bu $f^{-1}: Y \to X$ tərs inikasıdır, burada $f: X \to Y$- əvvəlcədən verilən homenomorfizmdir. $c)$ halında isə bu $g \circ f: X \to Z$ inikasıdır, burada $f: X \to Y$ və $g: Y \to Z-$ əvvəlcədən verilən homeo-morfizmlərdir. Bu mülahizələr simvolik şəkildə belə yazılır:

$a)\ X \cong_{Id} X;$

$b)\ X \cong_f Y \Rightarrow Y \cong_{f^{-1}} X;$

$c)\ X \cong_f Y, Y \cong_g Z \Rightarrow X \cong_{g \circ f} X.$ ■

Beləliklə, bütün topoloji fəzalar homeomorfluq münasibətinə nəzərən ekvivalentlik siniflərinə ayrılırlar. Bu siniflərə, yəni $M/_{\cong}$ faktor-çoxluğunun elementlərinə *topoloji tiplər* deyilir, burada $M-$topoloji fəzalar çoxluğudur.. Yalnız və yalnız homeomorf topoloji fəzalar eyni topoloji tipə malikdirlər.

(X,τ) fəzasının homeomorfizmlər zamanı dəyişməyən xassələrinə *topoloji xassələr* (və ya *topoloji invariantlar*) deyilir. Topoloji xassələr elə xassələrdir ki, onlara homeomorf fəzalar ya malikdirlər, ya da malik deyildirlər. Məsələn, diskretlik, antidiskretlik, kompaktlıq və rabitəlilik xassələri topoloji xassələrdir. Topoloji xassələrin öyrənilməsi topologiyanın predmetini təşkil edir. XIX əsrdə, topologiyanın predmetinin hələ Evklid fəzasında çoxluqlarla məhdudlaşdığı bir vaxda görkəmli riyaziyyatçı F.Kleyn topologiyanı həndəsənin fiqurların homeomorfizmlər zamanı dəyişməyən xassələrini öyrənən bir tərkib hissəsi kimi təyin etmişdir. Bu, topologiyanı həndəsənin digər tərkib hissələrindən olan Evklid həndəsəsi, hiperbolik həndəsə, proyektiv həndəsə, afin həndəsə və sferik həndəsə ilə bir sıraya gətirib çıxarmışdır.

3. Kəsilməz inikasların bir mühüm xüsusi halı kəsilməz funksiyalardır, yəni topoloji X fəzasının R həqiqi ədədlər çoxluğuna kəsilməz inikaslarıdır. f funksiyasının kəsilməzliyini belə ifadə etmək olar: ixtiyari $x_0 \in X$ nöqtəsi və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün x_0 nöqtəsinin elə U ətrafı vardır ki, $y \in U$ olduqda $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir.

Tutaq ki, $f: X \to Y-$metrik fəzaların kəsilməz inikasıdır, $\rho_1, \rho_2 - X, Y$ fəzaları üzərində metrikalardır. Onda f inikasının kəsilməzlik şərtini belə ifadə edə bilərik: ixtiyari $x_0 \in X$ nöqtəsi və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi vardır ki, $\rho_1(x, x_0) < \delta$ bərabərsizliyindən $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ bərabərsizliyi alınır.

Metrik fəzalar üçün ədədi ardıcıllığın yığılması anlayışının ümumiləşdirilməsi də faydalıdır. $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_0,x)=0$ olduqda deyirlər ki, $\{x_n\}$ nöqtələr ardıcıllığı x_0 nöqtəsinə yığılır: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. Fəzaların və inikasların bir çox xassələrini metrik fəzanın yığılan ardıcıllıqları terminləri ilə ifadə etmək olar. Məsələn, $Y\subset X$ çoxluğu verildikdə, əgər ixtiyari yığılan $\{x_n\}$ nöqtələr ardıcıllığı üçün $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ limiti də Y çoxluğuna aid olarsa, onda Y qapalı çoxluqdur. Metrik fəzaların $f:X\to Y$ inikasının kəsilməzlik şərtini Heyne mənada belə ifadə etmək olar: əgər $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ bərabərliyindən $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$ bərabərliyi alınırsa, onda deyirlər ki, f inikası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir.

4. Tutaq ki, X və Y topoloji fəzalardır. Yeni $X\times Y$ topoloji fəzasını təyin edək. $X\times Y$ çoxluğu X *və* Y *çoxluqlarının dekart hasilidir*:

$$X\times Y=\{(x,y)|x\in X, y\in Y\}.$$

$X\times Y$ çoxluğunda topologiya təyin edək. $U=\bigcup\limits_{\alpha}(V_\alpha\times W_\alpha)$ birləşməsi şəklində göstərilən $U\subset X\times Y$ çoxluğunu açıq çoxluq adlandırırıq, burada $V_\alpha\subset X, W_\alpha\subset Y-$ açıq çoxluqlardır. Açıq çoxluqların xassələrinin ödənilməsi asanlıqla yoxlanılır. Bu qaydada topologiyanın daxil edildiyi $X\times Y$ çoxluğu X *və* Y *topoloji fəzalaının dekart hasili* adlanır. X və Y topoloji fəzaları $X\times Y$ dekart hasilinin *vuruqları* adlanır. Dekart hasillərin aşağıdakı xassələri doğrudur: $a)$ $X\times Y$ və $Y\times X$ fəzaları homeomorfdurlar; $b)$ $(X\times Y)\times Z$ və $X\times(Y\times Z)$ fəzaları homeomorfdurlar. Birinci halda homeomorfizm olaraq, $\varphi(x,y)=(y,x)$ şəklində təsir edən $\varphi:X\times Y\to Y\times X$ inikası götürülür. $U=\bigcup\limits_{\alpha}(V_\alpha\times W_\alpha)$ $X\times Y$ fəzasının açıq çoxluğu olduqda, $\varphi(U)=\bigcup\limits_{\alpha}(W_\alpha\times V_\alpha)$ - $Y\times X$ fəzasının açıq çoxluğu olur. İkinci halda homeomorfizm olaraq, $\varphi((x,y),z)=(x,(y,z))$ şəklində təsir edən $\varphi:(X\times Y)\times Z\to X\times(Y\times Z)$ inikasını götürmək lazımdır. $X\times Y$ dekart hasilinin vuruqlardan birinin, məsələn X fəzasının üzərinə $f(x,y)=x$ şəklində təsir edən $f:X\times Y\to X$ proyeksiyası kəsilməzdir. Doğrudan da, $U \subset X$ açıq çoxluğunun proobrazı $f^{-1}(U) = U \times Y$ şəklindədir, yəni $f^{-1}(U)$ açıq çoxluqdur.

Mühazirə 4
TENZOR ANLAYIŞI. TENZORLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏR

Tutaq ki, $V - R$ həqiqi ədədlər meydanı üzərində $n-$ ölçülü vektor fəzadır, $\{\vec{e}_i\}, i = \overline{1,n}$, -bu fəzanın müəyyən bazisidir. $\forall \vec{x} \in V$ vektoru üçün $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + \cdots + x^n\vec{e}_n = x^i\vec{e}_i$ ayrılışı, digər $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisi üçün isə

$$\vec{e}_{i'} = A^i_{i'}\vec{e}_i$$

keçid düsturu doğrudur, burada $\left(A^i_{i'}\right)-$ keçid matrisi olub qeyri-məxsusidir, $i-$ toplama, yaxud «Eynşteyn» indeksidir. Əgər $\vec{x}$ vektorunun $\vec{x} = x^{i'}\vec{e}_{i'}$ ayrılışı da məlumdursa, onda

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i \tag{1}$$

çevirməsi yazılır, burada $\left(A^{i'}_i\right)-\left(A^i_{i'}\right)$ keçid matrisinin tərs matrisidir. (1) çevirməsinə vektorun *koordinatlarının çevirmə qanunu* deyilir.

Vektor arqumentli $\alpha : V \to R$ skalyar funksiyası:

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ üçün

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y});$$

2) $\forall \vec{x} \in V, \forall \lambda \in V$ üçün

$$\alpha(\lambda\vec{x}) = \lambda \cdot \alpha(\vec{x})$$

şərtləri ödənildikdə *xətti funksiya* adlanır. Məsələn, $\forall \vec{x} \in V, \vec{x} = x^i\vec{e}_i$ vektoru üçün $\alpha(\vec{x}) = x^1 + x^2 + x^3$ qaydası ilə təsir edən α funksiyası xətti funksiyadır.

V vektor fəzasında təsir edən bütün xətti funksiyalar çoxluğunu V^* ilə işarə edək. V^* çoxluğunda toplama və ədədə vurma əməlləri bu qayda ilə daxil edilir:

1) $\forall \alpha, \beta \in V^*, \forall \vec{x} \in V$ üçün

$$(\alpha + \beta)(\vec{x}) = \alpha(\vec{x}) + \beta(\vec{x});$$

2) $\forall \alpha \in V^*, \forall \vec{x} \in V, \forall \lambda \in R$ üçün

$$(\lambda\alpha)(\vec{x}) = \lambda \cdot \alpha(\vec{x}).$$

Bu əməllər V^* çoxluğunu *kovenktor fəza* adlanan vektor fəzaya çevirirlər. V və V^* fəzaları *qoşma fəzalardır*. V^* kovektor fəzasının elementlərini *kovektorlar* adlandırırlar və $\underset{\to}{\alpha}, \underset{\to}{\beta}, \underset{\to}{\gamma}, \ldots$ kimi işarə olunurlar. $\forall \underset{\to}{\alpha} \in V^*$ kovektoru üçün

$$\alpha_i = \underset{\to}{\alpha}(\vec{e}_i), i = \overline{1,n}$$

ədədləri $\underset{\to}{\alpha}$ *kovektorunun* $\{\vec{e}_i\}$ *bazisində koordinatları* adlanır.

V^* kovektor fəzasının

$$\underset{\to}{e}^j(\vec{e}_i) = \delta^j_i$$

şərtini ödəyən $\{\underset{\to}{e}^j\}, j = \overline{1,n}$ bazisinə $\{\vec{e}_i\}$ bazisi ilə *qarşılıqlı (qoşma) olan bazis* deyilir, burada δ^j_i – *Kroneker simvoludur*:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i. \end{cases}$$

$\underset{\to}{\alpha}$ kovektorunun $\{\vec{e}_i\}$ və $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazislərindəki α_i və $\alpha_{i'}$ koordinatları arasında aşağıdakı əlaqə doğrudur:

$$\alpha_{i'} = \underset{\to}{\alpha}(\vec{e}_{i'}) = \underset{\to}{\alpha}\left(A_{i'}^i \vec{e}_i\right) = A_{i'}^i \underset{\to}{\alpha}(\vec{e}_i) = A_{i'}^i \alpha_i,$$

və ya

$$\alpha_{i'} = A_{i'}^i \alpha_i. \tag{2}$$

1. Tutaq ki, $V - R$ həqiqi ədədlər meydanı üzərində $n-$ölçülü vektor fəzadır, V^* isə V vektor fəzasına qoşma olan kovektor fəzadır. q sayda $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in V$ vektor və p sayda $\underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p \in V^*$ kovektor arqumentlərindən asılı olan skalyar

$$z = t\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q, \underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p\right) \tag{1}$$

funksiyasını təyin edək. (1) funksiyası arqumentlərinin hər birinə nəzərən xəttilik şərtlərini ödədikdə *polixətti funksiya* adlanır. Məsələn, 1-ci vektor arqumentinə görə xəttilik şərtləri belə yazılır:

$$t\left(\vec{v}_1' + \vec{v}_1'', \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q, \underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p\right) = t\left(\vec{v}_1', \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q, \underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p\right) +$$
$$+ t\left(\vec{v}_1'', \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q, \underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p\right),$$
$$t\left(k \cdot \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q, \underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p\right) = k \cdot t\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_q, \underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p\right).$$

(1) polixətti funksiyasına həmçinin V vektor fəzası üzərində tipi (p, q) olan ($p \geq 0, q \geq 0$), yaxud p dəfə kontravariant və q dəfə kovariant *tenzor* deyilir. $s = p + q$ ədədi tenzorun valentliyi adlanır. Məsələn, valentliyi 2 olan tenzorlar $(2,0), (0,2)$ və $(1,1)$ tipli tenzorlardır. Tenzorlara dair nümunələrə baxaq.

1) (1,0) tipli $t\left(\underset{\to}{\eta}\right)$ tenzoru V vektor fəzasının vektorudur.

2) (0,1) tipli $t(\vec{v}_1)$ tenzoru V^* kovektor fəzasının kovektorudur.

3) (1,1) tipli tenzor $t\left(\vec{v}, \underset{\to}{\eta}\right)$ polixətti funksiyası ilə verilir və *afinor* adlanır.

V vektor fəzası üzərində təyin olunan bütün (p, q) tipli tenzorlar çoxluğu $T_q^p V$ ilə işarə olunur.

2. Tenzorlar üzərində aparılan əməlləri qeyd edək.

1^0. $t_1, t_2 \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzorlardırsa, onda bu tenzorların $t_1 + t_2$ *cəmi*

$$(t_1 + t_2)\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q, \underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p\right) = t_1\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q, \underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p\right) +$$
$$+ t_2\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q, \underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p\right)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in V$, $\underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p \in V^*$.

Qeyd. Yalnız eyni tipli tenzorları toplamaq mümkündür.

2^0. $t \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzor, k ixtiyari həqiqi ədəddirsə, onda t tenzorunun k ədədinə $k \cdot t$ *hasili*

$$(k \cdot t)\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q, \underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p\right) = k \cdot t\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q, \underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p\right)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in V$, $\underset{\to}{\eta}^1, \ldots, \underset{\to}{\eta}^p \in V^*$.

Göründüyü kimi, tenzorun ədədə hasili zamanı tip dəyişmir. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, $T_q^p V$ çoxluğu (p,q) tipli tenzorların toplanması və ədədə hasili əməllərinə görə vektor fəza təyin edir.

3^0. $t_1 \in T_{q_1}^{p_1} V,\ t_2 \in T_{q_2}^{p_2} V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzorlardırsa, onda bu tenzorların $t_1 \otimes t_2$ *hasili*

$$(t_1 \otimes t_2)(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{q_1} \vec{v}_{q_1+1},...,\vec{v}_{q_1+q_2}, \underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1}, \underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1+1},...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1+p_2}) =$$
$$= t_1(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{q_1}, \underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1}) \cdot t_2(\vec{v}_{q_1+1},...,\vec{v}_{q_1+q_2}, \underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1+1},...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p_1+p_2}),$$

burada $\vec{v}_a \in V, a = 1,2,...,q_1+q_2, \underset{\rightarrow}{\eta}^b \in V^*, b = 1,2,...,p_1+p_2$.

Göründüyü kimi, $t_1 \otimes t_2$ -(p_1+p_2, q_1+q_2) tipli tenzordur.

Tenzorların hasili əməlinin aşağıdakı xassələri vardır:

$a)$ $t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3) = (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3$;

$b)$ $(t_1 + t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes t_3 + t_2 \otimes t_2$;

$c)$ $(kt_1) \otimes t_2 = t_1 \otimes (kt_2) = k(t_1 \otimes t_2)$.

Qeyd. Tenzorların hasili əməli yerdəyişmə (kommutativ-lik) xassəsinə malik deyil, yəni

$$t_1 \otimes t_2 \neq t_2 \otimes t_1.$$

4^0. Tutaq ki, $t \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzordur və $p > 0, q > 0$. t tenzorunun m saylı vektor və k saylı kovektor arqumentlərinə görə *bükülməsi* dedikdə aşağıdakı kimi təyin olunan $tr_m^k t \in T_{q-1}^{p-1} V$ tenzoru başa düşülür:

$$tr_m^k t(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{q-1}, \underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p-1}) =$$
$$= t(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{m-1}, \vec{e}_i, \vec{v}_{m+1},...,\vec{v}_{q-1}, \underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{k-1}, \underset{\rightarrow}{e}^i, \underset{\rightarrow}{\eta}^{k+1},...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p-1}),$$

burada $\{\vec{e}_i\}, i = 1,2,...,n - V$ vektor fəzasının bazisidir, $\{\underset{\rightarrow}{e}^j\}$– onunla qoşma olan bazisdir və i toplama indeksi olbuğundan bu indeksə görə cəmləmə aparılır. Aydındır ki, bükülmə əməli vektor və ya kovektor arqumentlərindən hər hansı biri qurtarana qədər ardıcıl olaraq aparıla bilər.

5^0. Tutaq ki, $S_q - q$ dərəcəli əvəzləmələr qrupudur. S_q qrupunun $T_q^0 V$ tenzorlar fəzasında təsirini

$$\forall \sigma \in S_q,\ \forall t \in T_q^0 V,\ \ \sigma t(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q) = t(\vec{v}_{\sigma(1)},...,\vec{v}_{\sigma(q)})$$

düsturu ilə təyin edirik.

$t \in T_q^0 V$ tenzorunun *simmetrikləşməsi* dedikdə aşağıdakı kimi təyin olunan $Sym\, t \in T_q^0 V$ tenzoru başa düşülür:

$$Sym\, t = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \sigma t.$$

Məsələn, $t \in T_2^0 V$ tenzorunun simmetrikləşməsi

$$Sym\, t(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2!}(t(\vec{v}, \vec{w}) + t(\vec{w}, \vec{v}))$$

şəklində, $h \in T_3^0 V$ tenzorunun simmetrikləşməsi isə

$$Sym\, t(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \frac{1}{3!}(h(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) + h(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) + h(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) +$$
$$+ h(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) + h(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) + h(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}))$$

şəklində aparılır.

Qeyd edək ki, simmetrikləşmə əməli vektor və kovektor arqumentlərinin bir qrupuna da tətbiq oluna bilər. Məsələn, $t \in T_3^2 V$ tenzorunun 1-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə simmetrikləşməsi belə yazılır:

$$Sym_{1,3}\, t\left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \underset{\to}{\eta}, \underset{\to}{\xi}\right) = \frac{1}{2!}\left(t\left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \underset{\to}{\eta}, \underset{\to}{\xi}\right) + t\left(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}, \underset{\to}{\eta}, \underset{\to}{\xi}\right)\right).$$

Tərif. $t \in T_q^0 V$ tenzoru $\forall \sigma \in S_p$ əvəzləməsi üçün $\sigma t = t$ şərtini ödədikdə *simmetrik tenzor* adlanır. Tərifdən aydın olur ki, əgər $t \in T_q^0 V$ - simmetrik tenzordursa, onda $Sym\, t = t$. Digər tərəfdən, $t \in T_3^2 V$ tenzoru üçün $Sym_{1,3}\, t = t$ yazılışı onu göstərir ki, bu tenzor 1-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə simmetrikdir.

6^0. $\sigma \in S_q$ əvəzləməsinin işarəsini $Sgn\,\sigma$ ilə işarə edək. Aydındır ki, $Sgn\,\sigma$ cüt əvəzləmələr üçün 1-ə, tək əvəzləmələr üçün isə -1-ə bərabərdir.

$t \in T_q^0 V$ tenzorunun *çəp-simmetrikləşməsi* , yaxud *alternasiyası* aşağıdakı kimi təyin olunan $Al\, t \in T_q^0 V$ tenzoru na deyilir:

$$Al\, t = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma \in S_q} Sgn\,\sigma(\sigma t).$$

Tərifdən görünür ki, $t \in T_2^0 V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi

$$Al\, t(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2!}\left(t(\vec{v}, \vec{w}) - t(\vec{w}, \vec{v})\right)$$

şəklində, $h \in T_3^0 V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi isə

$$Al\, t(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \frac{1}{3!}\left(h(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) + h(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) + h(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) -\right.$$
$$\left. - h(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) - h(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) - h(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})\right)$$

şəklində aparılır.

Çəp-simmetrikləşmə əməlini də vektor və kovektor arqumentlərinin bir qrupuna tətbiq etmək mümkündür. Məsələn, $t \in T_3^2 V$ tenzorunun 2-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə çəp-simmetrikləşməsi belə yazılır:

$$Al_{2,3}\, t\left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \underset{\to}{\eta}, \underset{\to}{\xi}\right) = \frac{1}{2!}\left(t\left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}, \underset{\to}{\eta}, \underset{\to}{\xi}\right) - t\left(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}, \underset{\to}{\eta}, \underset{\to}{\xi}\right)\right).$$

Tərif. $t \in T_q^0 V$ tenzoru $\forall \sigma \in S_p$ əvəzləməsi üçün $Sgn\,\sigma \cdot \sigma t = t$ şərtini ödədikdə *çəp-simmetrik tenzor* adlanır. Tərifə görə, əgər $t \in T_q^0 V$ - çəp-simmetrik tenzordursa, onda $Al\, t = t$. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, simmetrik tenzorun alternasiyası və çəp-simmetrik tenzorun simmetrikləşməsi sıfra bərabərdir.

Mühazirə 5

TENZORUN KOORDİNATLARI. SİMMETRİK Və ÇəP-SİMMETRİK TENZORLAR

1. Fərz edək ki, ixtiyari $t \in T_q^p V$ tenzoru verilmişdir, burada $V - n -$ölçülü vektor fəzadır. V vektor fəzasının hər hansı $\{\vec{e}_i\}, i = 1,2,...,n,$ bazisini götürək və bu bazislə qoşma olan bazisi $\{\underset{\to}{e}^j\}, j = 1,2,...,n,$ ilə işarə edək.

Tərif. t tenzorunun $\{\vec{e}_i\}$ bazisindəki koordinatları aşağıdakı qayda ilə təyin olunan ədədlər sisteminə deyilir:

$$t^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q} = t\left(\vec{e}_{i_1},...,\vec{e}_{i_q},\underset{\to}{e}^{j_1},...,\underset{\to}{e}^{j_p}\right)$$

$1 \le i_a \le n, 1 \le j_b \le n, a = 1,2,...,q, b = 1,2,...,p$ olduğuna görə $t \in T^p_q V$ tenzorunun $\{\vec{e}_i\}$ bazisindəki koordinatlarının sayı n^{p+q} ədədinə bərabərdir.

Bir bazisdən digərinə keçdikdə tenzorun koordinatları dəyişir. Bu dəyişmənin xarakterini müəyyən edək. Tutaq ki, V vektor fəzasının $\{\vec{e}_i\}$ bazisindən fərqli digər $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisi verilmişdir. $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisinin qoşma olan bazisini $\{\underset{\to}{e}^{j'}\}$ ilə işarə edək. $t \in T^p_q V$ tenzorunun $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisindəki koordinatları aşağıdakı ifadəyə malikdirlər:

$$t^{j_1'\cdots j_p'}_{i_1'\cdots i_q'} = t\left(\vec{e}_{i_1'},...,\vec{e}_{i_q'},\underset{\to}{e}^{j_1'},...,\underset{\to}{e}^{j_p'}\right). \qquad (1)$$

Məlumdur ki, $\{\vec{e}_i\}$ bazisindən $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisinə və $\{\underset{\to}{e}^{j}\}$ bazisindən $\{\underset{\to}{e}^{j'}\}$ bazisinə keçid uyğun olaraq

$$\vec{e}_{i'} = A^i_{i'}\vec{e}_i, \qquad (2)$$

$$\underset{\to}{e}^{j'} = A^{j'}_j\underset{\to}{e}^{j} \qquad (3)$$

düsturları ilə verilir. (1) bərabərliyinin sağ tərəfində (2), (3) düsturlarını və xəttilik şərtlərini nəzərə alaq:

$$t^{j_1'\cdots j_p'}_{i_1'\cdots i_q'} = t\left(A^{i_1}_{i_1'}\vec{e}_{i_1},...,A^{i_q}_{i_q'}\vec{e}_{i_q},A^{j_1'}_{j_1}\underset{\to}{e}^{j_1},...,A^{j_p'}_{j_p}\underset{\to}{e}^{j_p}\right) =$$

$$= A^{i_1}_{i_1'}\cdots A^{i_q}_{i_q'}A^{j_1'}_{j_1}\cdots A^{j_p'}_{j_p}\,t\left(\vec{e}_{i_1},...,\vec{e}_{i_q},\underset{\to}{e}^{j_1},...,\underset{\to}{e}^{j_p}\right) =$$

$$= A^{i_1}_{i_1'}\cdots A^{i_q}_{i_q'}A^{j_1'}_{j_1}\cdots A^{j_p'}_{j_p}\,t^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q},$$

və ya

$$t^{j_1'\cdots j_p'}_{i_1'\cdots i_q'} = A^{i_1}_{i_1'}\cdots A^{i_q}_{i_q'}A^{j_1'}_{j_1}\cdots A^{j_p'}_{j_p}\,t^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q}. \qquad (4)$$

(4) düsturlarına bir vektor bazisindən digərinə keçdikdə (p,q) *tipli tenzorun koordinatlarının çevirmə düsturları* deyilir. (4) düsturlarından aydın olur ki, $t \in T^1_0 V$ tenzorunun koordinatları

$$t^{j'} = A^{j'}_j t^j$$

qaydası, yəni vektorun koordinatlarının çevirmə qanunu ilə (bax mühazirə 2, (1) düsturu), $t \in T^0_1 V$ tenzorunun koordinatları isə

$$t_{i'} = A^i_{i'} t_i$$

qaydası, yəni kovektorun koordinatlarının çevirmə qanunu ilə (bax mühazirə 1, (2) düsturu) dəyişirlər. Buradan $(1,0)$ tipli tenzorun vektor, $(0,1)$ tipli tenzorun isə kovektor olması bilavasitə alınır.

2. Tenzorlar üzərində aparılan əməlləri koordinatlarla ifadə etmək olar:

1^0. $\forall t,h \in T^p_q V$ tenzorları üçün

$$(t+h)^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q} = t^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q} + h^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q};$$

2^0. $\forall t \in T^p_q V$ tenzoru və $\forall k \in R$ həqiqi ədədi üçün

$$(kt)^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q} = k\cdot t^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q};$$

3^0. $\forall t_1 \in T^{p_1}_{q_1}V$, $\forall t_2 \in T^{p_2}_{q_2}V$ tenzorları üçün

$$(t_1\otimes t_2)^{j_1\cdots j_{p_1}j_{p_1+1}\cdots j_{p_1+p_2}}_{i_1\cdots i_{q_1}i_{q_1+1}\cdots i_{q_1+q_2}} = t^{j_1\cdots j_{p_1}}_{i_1\cdots i_{q_1}}\cdot t^{j_{p_1+1}\cdots j_{p_1+p_2}}_{i_{q_1+1}\cdots i_{q_1+q_2}};$$

4^0. $\forall t \in T_q^p V, p > 0, q > 0$, tenzoru üçün

$$\left(tr_m^k t\right)_{i_1 \cdots i_{q-1}}^{j_1 \cdots j_{p-1}} = t_{i_1 \cdots i_{m-1} s i_{m+1} \cdots i_{q-1}}^{j_1 \cdots j_{k-1} s j_{k+1} \cdots j_{p-1}};$$

5^0. $\forall t \in T_q^0 V$ tenzoru üçün

$$\left(Sym\, t\right)_{i_1 \cdots i_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} t_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(q)}} = t_{\left(i_1 \cdots i_q\right)}.$$

Xüsusi halda, $\forall t \in T_2^0 V$ tenzorunun simmetrikləşməsi koordi-natlarla

$$t_{(ij)} = \frac{1}{2!}\left(t_{ij} + t_{ji}\right),$$

$\forall h \in T_3^0 V$ tenzorunun simmetrikləşməsi isə koordinatlarla

$$h_{(ijk)} = \frac{1}{3!}\left(h_{ijk} + h_{jki} + h_{kij} + h_{jik} + h_{ikj} + h_{kji}\right)$$

şəklində ifadə olunur.

$\forall t \in T_3^2$ tenzoruna baxaq. $t_{(i|j|k)}^{lm}$ yazılışı onu göstərir ki, simmetrikləşmə əməli yalnız i və k indekslərinə tətbiq olunur:

$$t_{(i|j|k)}^{lm} = \frac{1}{2!}\left(t_{ijk}^{lm} + t_{kji}^{lm}\right).$$

6^0. $\forall t \in T_q^0 V$ tenzoru üçün

$$\left(Al\, t\right)_{i_1 \cdots i_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} Sgn\sigma \cdot t_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(q)}} = t_{\left[i_1 \cdots i_q\right]}.$$

Xüsusi halda, $\forall t \in T_2^0 V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi koordinatlarla

$$t_{[ij]} = \frac{1}{2!}\left(t_{ij} - t_{ji}\right),$$

$\forall h \in T_3^0 V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi isə koordinatlarla

$$h_{[ijk]} = \frac{1}{3!}\left(h_{ijk} + h_{jki} + h_{kij} - h_{jik} - h_{ikj} - h_{kji}\right)$$

şəklində ifadə olunur.

Mühazirə 6

BIR SKALYAR ARQUMENTDƏN ASILI VEKTOR -FUNKSİYALAR. XƏTT ANLAYIŞI, XƏTT TƏNLİKLƏRİ. HAMAR XƏTLƏR

Tutaq ki, $V-$üçölçülü Evklid vektor fəzasıdır, I isə müəyyən ədədi aralıqdır. Hər bir $t \in I$ ədədinə V fəzasından olan müəyyən $\vec{v}(t)$ vektorunu qarşı qoyan qayda verildikdə deyirlər ki, I aralığında t skalyar arqumentinin $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası təyin olunmuşdur. Aydındır ki, $\vec{v}(t)$ vektorunun $\left|\vec{v}(t)\right|$ uzunluğu t dəyişəninin skalyar (ədədi qiymətlər alan) funksiyası-dır.

Tutaq ki, $\vec{v}(t)$- I aralığında təyin olunmuş vektor funksiyadır. $\left|\vec{v}(t)\right|$ funksiyası $t_0 \in I$ nöqtəsinin yaxın ətrafında sonsuz kiçik olduqda, yəni $\lim\limits_{t \to t_0}\left|\vec{v}(t)\right| = 0$ şərti ödənildikdə, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası t_0 nöqtəsinin yaxın ətrafında sonsuz kiçik vektor funksiya adlandırılır.

Fərz edək ki, elə sabit $\vec{a}$ vektoru vardır ki, $\vec{v}(t)-\vec{a}$ fərqi t_0 nöqtəsinin yaxın ətrafında sonsuz kiçikdir. Bu halda $\vec{a}$ vektoru $t \to t_0$ olduqda $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının limiti adlanır və $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{v}(t)=\vec{a}$ yazılır.

$t_0 \in I$ nöqtəsində $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)$ bərabərliyi ödənildikdə deyirlər ki, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası t_0 nöqtəsində kəsilməzdir. I aralığının hər bir nöqtəsində kəsilməz olan $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası bu aralıqda kəsilməz vektor funksiya adlanır.

Müəyyən $t \in I$ nöqtəsinə baxaq və $t-$yə elə Δt artımı verək ki, $t+\Delta t \in I$ olsun. $\Delta\vec{v}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$ vektorunu təyin edək. Əgər $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ limiti vardırsa, deyəcəyik ki, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası t nöqtəsində diferensiallanandır. Bu limit $\vec{v}'(t)$, yaxud $\frac{d\vec{v}}{dt}$ kimi işarə olunur və $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının t nöqtəsində törəməsi adlanır. $d\vec{v}=\vec{v}'(t)dt$ vektoruna $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının t nöqtəsində diferensialı deyilir. I aralığının hər bir nöqtəsində diferensiallanan $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası bu aralıqda diferensiallanan vektor funksiya adlanır.

V vektor fəzasının ortonormallaşmış $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazisinə baxaq və $\vec{v}(t)$ funksiyasını bu bazis üzrə ayıraq:

$$\vec{v}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \tag{1}$$

Beləliklə, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazisinin köməyi ilə I aralığında verilmiş $x(t), y(t), z(t)$ ədədi funksiyalarını təyin edir. Bu funksiyalar $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazisində koordinatları adlanır ($x(t)-$yə birinci, $y(t)-$yə ikinci, $z(t)-$yə isə üçüncü koordinat deyilir). (1) ayrılışından aydın olur ki, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının $t_0 \in I$ nöqtəsində kəsilməz olması üçün zəruri və kafi şərt bu nöqtədə $x(t), y(t), z(t)$ funksiyalarından hər birinin kəsilməz olmasıdır. Əgər $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ sabit vektor-dursa, onda

$$\left|\vec{v}(t)-\vec{a}\right|=\sqrt{(x(t)-a_1)^2+(y(t)-a_2)^2+(z(t)-a_3)^2}\,. \tag{2}$$

(2) düsturundan görünür ki, $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{v}(t)=\vec{a}$ olması üçün zəruri və kafi şərt $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=a_1$, $\lim\limits_{t\to t_0}y(t)=a_2$, $\lim\limits_{t\to t_0}z(t)=a_3$ olmasıdır.

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 1. *I aralığında (1) ayrılışı ilə verilmiş $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası yalnız və yalnız $x(t), y(t), z(t)$ funksiyaları diferensial-lanan olduqda diferensiallanandır və*

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{3}$$

İsbatı. (1) düsturundan alınır ki, $\Delta\vec{v}=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}$, burada $\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)$, $\Delta y=y(t+\Delta t)-y(t)$, $\Delta z=z(t+\Delta t)- \; -z(t)$. Beləliklə:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}\,. \tag{4}$$

(4) ayrılışından teoremin isbatı bilavasitə alınır. Bu ayrılışa əsasən, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ limitinin varlığı $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{dz}{dt}$ limitlərinin varlığına ekvivalentdir və (3) düsturu doğrudur.

Diferensiallanan vektor funksiyalara dair nümunələrə baxaq.

1. $\vec{v}(t)=\vec{a}t+\vec{b}$, burada $\vec{a},\vec{b}-$sabit vektorlardır.

$\vec{v}(t)$ funksiyası bütün ədəd oxunda verilmişdir. Əgər $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazisində $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarının $\vec{a}(a_1,a_2,a_3),\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ koordinatları vardırsa, onda $x(t)=a_1t+b_1$, $y(t)=a_2t+b_2$, $z(t)=a_3t+b_3$. Teorem 1-ə görə $\vec{v}(t)$ vektor funksiyası diferensiallanandır və

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = \vec{a}.$$

Göründüyü kimi, $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının törəməsi sabit vektor-dur.

2. $\vec{v}(t) = (a\cos t)\vec{i} + (a\sin t)\vec{j} + (bt)\vec{k}$, burada $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -orto-normallaşmış bazisdir, a və b sabitlərdir.

Verilmiş bazisdə $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının koordinatları

$$x(t) = a\cos t,\ y(t) = a\sin t,\ z(t) = bt$$

funksiyalarıdır. Teorem 1-ə görə, $\vec{v}(t)$-diferensiallanan vektor funksiyadır və

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (-a\sin t)\vec{i} + (a\cos t)\vec{j} + b\vec{k}.$$

I aralığında diferensiallanan $\vec{v}(t), \vec{w}(t)$ vektor funksiyaları və $f(t)$ ədədi funksiyası üçün aşağıdakı diferensiallama qaydaları doğrudur:

1^0. $\frac{d}{dt}(\vec{v} + \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt}$;

2^0. $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{w}}{dt}$;

3^0. $\frac{d}{dt}[\vec{v}, \vec{w}] = \left[\frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{w}\right] + \left[\vec{v}, \frac{d\vec{w}}{dt}\right]$;

4^0. $\frac{d}{dt}(f\vec{v}) = \frac{df}{dt}\vec{v} + f\frac{d\vec{v}}{dt}$.

Nümunə olaraq, 4^0 bərabərliyinin doğruluğunu göstərək. Ortonormallaşmış $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisini seçək və bu bazisdə $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının koordinatlarını $x(t), y(t), z(t)$ ilə işarə edək. Onda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisində $f(t) \cdot \vec{v}(t)$ vektor funksiyasının $f(t)x(t), f(t)y(t)$, $f(t)z(t)$ koordinatları olar. Teorem 1-ə əsasən,

$$\frac{d}{dt}(f\vec{v}) = \frac{d(fx)}{dt}\vec{i} + \frac{d(fy)}{dt}\vec{j} + \frac{d(fz)}{dt}\vec{k}.$$

Buradan, ədədi funksmyaların difereniallanması qaydala-rından istifadə etməklə, alarıq:

$$\frac{d}{dt}(f\vec{v}) = \frac{df}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + f\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{df}{dt}\vec{v} + f\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

$1^0, 2^0$ və 3^0 bərabərliklərinin doğruluğu analoji qaydada əsaslandırılır.

Növbəti mövzuların şərhində istifadə edəcəyimiz aşağıdakı teoremi qeyd edək:

Teorem 2. *Əgər I aralığında $|\vec{v}(t)| = 1$ olarsa, onda hər bir $t \in I$ nöqtəsində $\vec{v}(t)$ vektoru bu nöqtədə hesablanan $\frac{d\vec{v}}{dt}$ törəməsinə ortoqonaldır.*

İsbatı. Şərtə görə, I aralığında $\vec{v}^2 = 1$ eyniliyi doğrudur. Bu eyniliyi t dəyişəninə görə diferensiallayaraq, 2^0 qaydasından istifadə etsək, $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ olduğunu alarıq. Buradan görünür ki, I aralığının hər bir nöqtəsində $\vec{v}$ və $\frac{d\vec{v}}{dt}$ vektorları ortoqonaldırlar.

Qeyd. I aralığında verilmiş $\vec{v}(t)$ vektor funksiyasının $\frac{d\vec{v}}{dt}$ törəməsi bu aralıqda yeni vektor funksiyadır. Ona görə də, ədədi funksiyalarda olduğu kimi, yüksək tərtibli $\frac{d^2\vec{v}}{dt}, \frac{d^3\vec{v}}{dt}, \ldots, \frac{d^n\vec{v}}{dt}$ törə-mələri ilə bağlı anlayışları daxil etmək olar.

1. Üçölçülü E_3 Evklid fəzasında *sadə xətt* dedikdə ixtiyari düz xətt, parça və ya şüa başa düşülür (burada şüa olaraq, qapalı şüa götürülür).

Sadə xətlərdən hər hansı birinə homeomorf olan $\gamma_0 \in E_3$ fiquru *elementar xətt* (və ya *elementar əyri*) adlanır. Parçaya homeomorf olan fiqura *qövs* deyilir.

Tutaq ki, bizə d düz xətti verilmişdir. Bu düz xətt üzərində hər hansı $O'\vec{i}$ koordinat sistemini daxil edək. Əgər hər bir $t \in R$ ədədinə koordinatı t olan ($\overrightarrow{O'M} = t\vec{e}$) M nöqtəsini qarşı qoysaq, biyektiv $R \to d$ inikasını alarıq. Bu inikas homeomor-fizmdir və bu inikas zamanı R ədəd oxu d düz xəttinə, (α, β) intervalı ucları olmayan parçaya (bu parçanın düz xəttə homeomorf olması aşkardır), $[\alpha, \beta]$ ədədi parçası isə AB parçasına çevrilir, burada A və B $[\alpha, \beta]$ parçasının ucları-nın obrazlarıdır. $[\alpha, \beta)$ aralığı B uc nöqtəsi olmayan AB parçasına çevrilir (belə AB parçası isə şüaya homeomorfdur).

Beləliklə, ixtiyari ədədi aralıq (yəni bütün ədəd oxu, qapalı ədədi şüa, ədədi parça, uclarından biri və ya hər ikisi olmayan ədədi parça) sadə xətlərdən birinə homeomorfdur. Homeomorfluq münasibəti ekvivalentlik münasibəti olduğundan (bax, mühazirə 6, teorem 5), elementar xəttə yuxarıda verdiyimiz tərifi belə də ifadə etmək olar: *müəyyən ədədi aralığa homeomorf olan $\gamma_0 \in E_3$ fiquruna elementar xətt deyilir.*

Elementar xətlərə nümunələr göstərək.

Nümunə 1. Ucları A və B nöqtələri olan ω yarım çevrəsi parçaya homeomorf olduğundan, elementar xətt, daha dəqiq desək, qövsdür.

Nümunə 2. Düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində verilən $y = \sin x$ sinusoidinə $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ düzbucaqlı koordinat sistemində

$$x = t, \quad y = \sin t, \quad z = 0$$

tənlikləri ilə verilən fiqur kimi baxıla bilər, burada $t \in R$. Bu tən-liklər R çoxluğu ilə sinusoid arasında homeomorfizm yaradırlar. R çoxluğu Ox oxuna homeomorf olduğundan, sinusoid elemen-tar xətdir.

Yuxarıdakılardan aydın olur ki, əgər E_3 Evklid fəzasında düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemi verilmişdirsə, onda γ_0 ele-mentar xətti

$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t) \qquad (1)$$

tənliklər sistemi ilə təyin olunar, burada t müəyyən I aralığında dəyişir, (1) düsturlarının sağ tərəfləri isə I aralığında kəsilməz funksiyalardır və I aralığının γ_0 elementar xəttinə

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

homeomorf inikasını həyata keçirirlər.

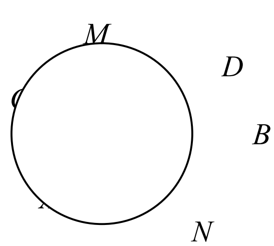
(1) tənlikləli verilmiş xəttin *parametrik tənlikləri* adlanır.

2. Elementar xətlərin sonlu, və ya hesabi çoxluğu ilə örtülə bilən fiqura *xətt* (və ya *əyri*) deyilir.

Bu tərifdən belə bir mühüm nəticə alınır: *əgər γ müəyyən xətdirsə və M onun üzərində nöqtədirsə, onda elə γ_0 elementar xətti vardır ki, $M \in \gamma_0 \subset \gamma$.*

Nümunələrə baxaq.

Nümunə 3. Çevrəni iki AMB və CND qövsləri ilə örtmək olar (şək.1). Ona görə də çevrə daxil etdiyimiz tərif mənasında xətdir.



Şəkil 1

Nümunə 4. $y = tgx$ funksiyasının qrafiki (tangensoid) elə elementar xətlərin hesabi çoxluğundan ibarətdir ki, onlardan hər biri x arqumenti $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ intervalında dəyişdikdə bu funksiyanın qrafikidir. Ona görə də tangensoid xətdir.

3. Tutaq ki, γ_0 elementar xətti (1) parametrik tənlikləri ilə verilmişdir, burada t müəyyən I aralığında dəyişir. Əgər $x(t), y(t), z(t)$ funksiyalarının müəyyən k natural ədədi üçün $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələri vardırsa və hər bir $t \in I$ nöqtəsində

$$ranq\|x', y', z'\| = 1 \tag{2}$$

hərti ödənilirsə, onda deyirlər ki, γ_0 C^k *sinifindən olan hamar xətdir* (ştrix onu göstərir ki, dəyişən t parametrinə görə diferensiallanır).

(2) şərtinin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, x', y', z' törəmə-ləri t parametrinin I aralığından olan heç bir qiymətində eyni zamanda sıfra bərabər olmurlar.

Hamar xəttə dair nümunəyə baxaq.

Nümunə 5. $x = t, y = \sin t, z = 0, t \in R$ tənlikləri Oxy müstəvisində sinusoidi təyin edirlər. Sinusoidin tənliklərinin sağ tərəflərinin $R-$də ixtiyari tərtibdən kəsilməz törəmələri vardır, belə ki, $x' = 1, y' = \cos t, z' = 0$, ona görə də (2) şərti ödənilir. Bu isə göstərir ki, sinusoid C^∞ sinifindən olan hamar xətdir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, çevrə C^∞ sinifindən olan hamar xətdir. Doğrudan da, a radiuslu çevrənin düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində $x = a\cos t, y = a\sin t$ parametrik tənlikləri vardır. Bu çevrəyə $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemində

$$x = a\cos t, y = a\sin t, z = 0 \tag{3}$$

tənlikləri ilə verilən fiqur kimi baxa bilərik. (3) tənliklərinin sağ tərəflərinin $R-$də ixtiyari tərtibdən kəsilməz törəmələri vardır,

belə ki, $x' = -a\sin t, y' = a\cos t, z' = 0.$ $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$ oldu-ğundan, (2) şərti ödənilir. Deməli, çevrə C^∞ sinifindən olan hamar xətdir.

4. Tutaq ki, t parametri müəyyən I aralığında dəyiş-dikdə (1) tənlikləri γ_0 elementar xəttini təyin edirlər. Qeyd olunduğu kimi, bu tənliklər müəyyən $f: I \to \gamma_0$ homeomor-fizmini elə təyin edirlər ki, $f(I) = \gamma_0$ olsun. Əgər h homeomor-fizmi müəyyən $\tau = h(t)$ $, t \in I$ $, \tau \in I'$ qaydası üzrə I aralığını I' aralığına çevirirsə, onda $h^{-1}: I' \to I$ tərs inikası da homeo-morfizmdir, belə ki, $t = h^{-1}(\tau)$.

$t-$nin ifadəsini (1) tənliklərində yerinə yazsaq, alarıq:

$$x = f_1(\tau), y = f_2(\tau), z = f_3(\tau), \tag{4}$$

burada $f_1(\tau) = x(h^{-1}(\tau)),\ f_2(\tau) = y(h^{-1}(\tau)),\ f_3(\tau) = z(h^{-1}(\tau)) - I'$ aralığında dəyişən τ arqumentinin mürəkkəb funksiyalarıdır. (4) qaydası üzrə təsir edən $I' \to E_3$ inikasını g ilə işarə edək. (1) və (4) düsturlarının müqayisəsi göstərir ki, $\tau = h(t)$ olduqda $f(t) = g(\tau)$. Buradan $f = g \circ h$ və $g = f \circ h^{-1}$ olması alınır. Beləliklə, $g-$homeomorfizmdir. Bu homeomorfizmdə I' aralığı γ_0 xəttinə çevrilir. Bu halda deyirlər ki, $\tau = h(t)$ funksiyası γ_0 xətti üzərində t parametrinin *əvəz olunmasını təyin edir.* Beləliklə, elementar xətt halında (1) tənliklərində parametrin əvəz olunması $h: I \to I'$ homeomlrfizmi vasitəsilə həyata keçirilir. Hamar əyri halında analoji məsələnin həlli daha mürəkkəbdir. Hər şeydən əvvəl, $\tau = h(t)$ funksiyası I aralığında diferensiallanan olmalıdır. Lakin bu şərt yetərli deyil. Mürəkkəb funksiyanın diferensial-lanması qaydasına görə,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}, \tag{5}$$

olduğundan, hamar xəttin ödəməli olduğu (2) şərti $\tau = h(t)$ funksiyasının üzərinə belə bir məhdudiyyət qoyur: $\frac{d\tau}{dt}$ törəməsi I aralığının heç bir nöqtəsində sıfra çevrilməməlidir. Bundan başqa, γ_0 xəttinin yeni parametrizasiyada da C^k sinifindən olması üçün $h(t)$ funksiyasının I aralığında $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələrinin varlığını tələb etməliyik.

Beləliklə, *t parametrinin I aralığında dəyişməsi şərtilə (1) tənlikləri ilə verilmiş və C^k sinifindən olan hamar γ_0 xətti üçün parametrin mümkün əvəz olunması elə $h: I \to I'$ əvəz olunmasıdır ki, bu halda $h(t)$ funksiyasının I aralığında $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələri vardır və birinci tərtib $\frac{dh}{dt}$ törəməsi aralığın bütün nöqtələrində sıfırdan fərqlidir.* Nümunəyə baxaq.

Nümunə 6. Oxy müstəvisində $y = x^2$ tənliyi ilə verilən para-bolası E_3 fəzasında $x = t, y = t^2, z = 0$ tənlikləri ilə verilə bilər, burada t $I = R$ aralığında dəyişir. Parabola C^∞ sininfindən olan hamar xətdir. Parametrin $\tau = t^3 + t$ əvəz olunmasına baxaq. $h(t) = t^3 + t$ funksiyasının ixtiyari tərtibdən törəmələrinin varlı-ğından və istənilən t üçün $\frac{dh}{dt} = 3t^2 + 1 \neq 0$ olmasından alınır ki, $\tau = t^3 + t$ mümkün əvəz olunmadır. Lakin parametrin $\tau = t^2$ düsturu ilə verilən əvəz olunması mümkün olmayandır. Bu onunla bağlıdır ki, $\tau = t^2$ əvəz olunması nəticəsində I aralığı ona homeomorf olmayan $I' = [0, \infty)$ aralığına çevrilir. Parametrin $\tau = t^3$ düsturu ilə verilən əvəz olunması da mümkün olmayandır. Doğrudan da, bu halda t^3 funksiyasının I aralığında istənilən tərtibdən kəsilməz törəmələrinin varlığına və bu əvəz olunmada I aralığının onun özünə homeomorf inikas etdirilməsinə baxmayaraq, $t = 0 \in I$ nöqtəsində $\frac{d\tau}{dt} = 0$.

Mühazirə 7

XƏTTƏ TOXUNAN DÜZ XƏTT. XƏTT QÖVSÜNÜN UZUNLUĞU. TƏBİİ PARAMETR

1. Əgər fəzada düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemi daxil edilmişdirsə, onda C^k sinifindən olan hamar γ xətti

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \tag{1}$$

parametrik tənlikləri ilə verilə bilər, burada (1) tənliklərinin sağ tərəflərinin müəyyən I aralığında $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz tö-rəmələri vardır və bu aralıqda

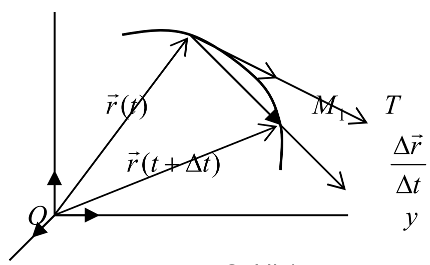
$$ranq\left\|\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\| = 1. \tag{2}$$

(1) tənliklərini uyğun olaraq, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarına vurub, tərəf-tərəfə toplasaq, alarıq:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{3}$$

burada $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ və $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Göründüyü kimi, $\vec{r}(t) - I$ aralığında təyin olunmuş və koordinatları $x(t), y(t)$ və $z(t)$ funksiyaları vektor-funksiyadır. (1) tənlikləri (3) vektor tənliyinə ekvivalentdirlər. (3) tənliyi γ xəttinin *vektorial şəkildə parametrik tənliyi* adlanır. (2) şərti onu göstərir ki, istənilən $t \in I$ qiymətində $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$.

Hamar γ xətti üzərində $\vec{r}(t)$ və $\vec{r}(t+\Delta t)$ radius vektorla-rı ilə təyin olunan M və M_1 nöqtələrini götürək. $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ vektoru MM_1 kəsəninin yönəldici vektorudur. Aşkardır ki, $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ vektoru da MM_1 kəsə-ninin yönəldici vektorudur (şək.1).



Şəkil 1

Δt sıfra yaxınlaşdıqda, M_1 nöqtəsi γ xətti üzərində yerini dəyişərək, M nöqtəsinə qeyri-məhdud yaxınlaşır və limit vəziyyə-tində onunla üst-üstə düşür. Bu zaman MM_1 kəsəni M nöqtəsi-nin ətrafında fırlanaraq, limit vəziyyətində γ xəttinə M nöqtəsin-də toxunan MT düz xətti ilə üst-üstə düşür (MT toxunanı kəsənin limit vəziyyəti kimi təyin olunur). MM_1 kəsəninin $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ yönəldici vektorunun $\Delta t \to 0$ şərti daxilində limiti MT toxunanının $\frac{d\vec{r}}{dt}$ yönəldici vektoru olur. Əgər γ xəttinin digər $\tau = h(t)$ parametrizasiyasına baxsaq, alarıq:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}. \tag{4}$$

I aralığının bütün nöqtələrində $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$ olduğundan, (4) ğərabərliyindən görünür ki, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ və $\frac{d\vec{r}}{d\tau}$ vektorları kollineardırlar, eləcə də I aralığının bütün nöqtələrində $\frac{d\vec{r}}{d\tau} \neq 0.$ Bu o deməkdir ki, $\frac{d\vec{r}}{d\tau}$ vektoru da MT toxunanının yönəldici vektorudur. Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etdik:

Teorem. *(3) tənliyi ilə verilən hamar γ xəttinin hər bir M nöqtəsində M nöqtəsi və $\frac{d\vec{r}}{dt}$ yönəldici vektoru ilə təyin olunan toxu-nan düz xətt vardır.*

2. Tutaq ki, C^k sinifindən olan hamar γ xətti (1) tənlikləri ilə verilmişdir, burada t parametri müəyyən I aralığında dəyişir. $[\alpha, t] \subset I$ parçasını götürək. t parametri bu parçada dəyişdikdə, (1) tənlikləri ucları $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ və $B(x(t), y(t), z(t))$ nöqtə-lərində olan γ_1 hamar qövsünü təyin edirlər. Riyazi analiz kur-sundan məlum olduğu kimi, γ_1 qövsünün s uzunluğu

$$s = \int_\alpha^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \tag{5}$$

düsturu ilə, və ya vektorial şəkildə yazılan

$$s = \int_\alpha^t \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt \tag{6}$$

düsturu ilə hesablanır. Buradan aydın olur ki, s qövs uzunluğu t parametrinin funksiyasıdır: $s = s(t)$.

Yuxarı sərhəddi dəyişən olan müəyyən inteqralın məlum xassəsinə (5)-dən alarıq:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|. \tag{7}$$

(7)-dən görünür ki, *hamar xəttin $s(t)$ qövs uzunluğu t parametrinin artan funksiyasıdır.*

$I_0 = \{t \in I \mid t \geq \alpha\}$ aralığını götürək. Aşkardır ki, əgər t pa-rametri yalnız I_0 aralığında dəyişərsə, onda (1) tənlikləri ilə müəyyən $\gamma_1 \subset \gamma$ hamar (C^k sinifindən) xətti təyin olunar. (5) düs-turu I_0 aralığının müəyyən $I_0^* \subset R$ aralığının üzərinə $s = s(t)$ ini-kasını təyin edir. $s = s(t)$ I_0 aralığında ciddi artan funksiyadır. Ona görə də bu funksiyanın $t = t(s)$ tərs funksiyası vardır və

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} > 0. \tag{8}$$

(5) düsturundan müəyyən edirik ki, $s(t)$ funksiyasının I_0 aralığında $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələri vardır. (8) bəra-bərliyi isə göstərir ki, $t(s)$ funksiyasının I_0^* aralığında $k-$cı tər-tibə qədər kəsilməz törəmələri vardır. Buradan aydın olur ki, $s(t)$ funksiyası elə $I_0 \to I_0^*$ homeomorfizmini təyin edir ki, bu ho-meomorfizm γ_1 hamar xətti üzərində parametrin mümkün əvəz olunmasıdır.

Beləliklə, hamar xətt üzərində parametr olaraq, bu xəttin müəyyən nöqtəsindən hesablanan s qövs uzunluğunu götürmək olar. Bu parametrizasiya γ xəttinin *təbii parametrizasiyası* adlanır.

3. Tutaq ki, hamar xətt üzərində təbii parametrizasiya se-çilmişdir. Onda (1) tənlikləri aşağıdakı kimi yazılar:

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s),$$

burada $s-$xəttin müəyyən A nöqtəsindən hesablanan qövs uzun-uğudur. Bu halda (7) düsturundan $t = s$ əvəzləməsini aparmaqla, alarıq:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1, \text{ yəni } \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1.$$

Buradan görünür ki, $\frac{d\vec{r}}{ds}-$vahid vektordur. İsbat etdiyimiz yuxa-rıdakı teoremə görə, bu vektor uyğun M nöqtəsində əyriyə toxu-nan düz xəttin yönəldici vektorudur. $\frac{d\vec{r}}{ds}$ vektorunu M nöqtəsin-də *xəttə toxunan düz xəttin vahid vektoru* deyəcəyik və $\vec{\tau}$ ilə işarə edəcəyik:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Mühazirə 8

FƏZA XƏTTİNİN FRENE ÜÇÜZLÜSÜ, FRENE DÜSTURLARI. FƏZA XƏTTİNİN ƏYRİLİYİ VƏ BURUQLUĞU

1. C^k sinifindən olan (burada $k \geq 3$) və

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \tag{1}$$

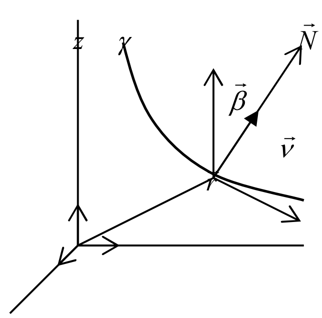
təbii parametizasiyası ilə verilən hamar γ xəttinə baxaq.

Əgər fəzada düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemi seçilmiş-dirsə, onda (1) tənliyi

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s) \tag{2}$$

tənliklərinə ekvivalentdir.

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ vektoru γ xəttinə M nöqtəsində toxunan düz xəttin vahid vektorudur, burada $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (bax, şək.1).



$\vec{N} = \dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ vektoru γ xətti-nin M nöqtəsində *əyrilik vektoru* adlanır. $|\vec{N}| = k$ ədədinə γ xətti-nin M nöqtəsində *əyriliyi* deyilir. γ xətti boyunca k əyriliyi s təbii parametrinin funksiyasıdır.

$\vec{k}$ M $\vec{\tau}$

$\vec{i}$ O $\vec{j}$

Şəkil 1

Əgər verilmiş M nöqtəsində $k \neq 0$ olarsa, onda $\rho = \dfrac{1}{k}$ ədədinə xəttin M nöqtəsində *əyrilik radiusu* deyilir. Beləliklə, əgər xətt (1) təbii parametrizasiyası ilə verilərsə, onda onun əyriliyi

$$k = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \qquad (3)$$

düsturu ilə hesablanar.

γ xətti (2) tənlikləri ilə verildiyi halda (3) düsturu

$$k = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \qquad (4)$$

şəklində yazılır.

Teorem 1. *γ xəttinin sadə xətt olması üçün zəruri və kafi şərt onun hər bir nöqtəsində əyriliyinin sıfra bərabər olmasıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, γ sadə xətdir (yəni ya düz xətdir, ya parçadır, ya da şüadır). Onda bu xətt

$$\vec{r} = \vec{p}s + \vec{r}_0$$

təbii parametrizasiyası ilə təyin olunar, burada s müəyyən I aralığına daxildir, $\vec{p}$ və $\vec{r}_0$ isə sabit vektorlardır. Buradan aydın olur ki, $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{p}$, $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{0}$. (3) düsturuna əsasən, istənilən $s \in I$ üçün $k = 0$.

Tərsinə: tutaq ki, (1) xəttinin bütün nöqtələri üçün əyrilik sıfra bərabərdir. (4) bərabərliyindən istifadə etməklə alırıq:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \ \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \ \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Bu münasibətlərdən alınır ki,

$$\frac{dx}{ds} = p_1, \ \frac{dy}{ds} = p_2, \ \frac{dz}{ds} = p_3, \qquad (5)$$

burada p_1, p_2, p_3 – sabit ədədlərdir.

(5) bərabərliklərini inteqrallasaq, alarıq:

$$x = p_1 s + x_0, \quad y = p_2 s + y_0, \quad z = p_3 s + z_0, \qquad (6)$$

burada $s \in I$. γ xəttinin (6) parametrik tənliklərindən məlum olur ki, bu xətt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindən keçən və yönəldici vektoru $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ vektoru olan düz xətt üzərində yerləşir. Bu isə o deməkdir ki, γ – sadə xətdir.

2. Fərz edək ki, γ xəttinin bütün nöqtələrində əyriliyi sıfırdan fərqlidir. Bu şərt daxilində γ xəttinin hər bir M nöqtə-sindən $(M, \vec{N})$ düz xətti keçir. Bu düz xəttə γ xəttinin M nöq-təsində *baş normalı* deyilir. X mühazirədə verilən teorem 2-yə görə $\vec{N} \perp \vec{\tau}$. Beləliklə, $(M, \vec{N})$ *baş normalı* $(M, \vec{\tau})$ *toxunanına perpendikulyardır.*

$\dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \vec{\nu}$ vektoru *baş normalın vahid vektoru* adlanır. $|\vec{N}| = k$ olduğundan, $\vec{N} = k\vec{\nu}$, yəni

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}. \qquad (7)$$

$\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$ vektorunu təyin edək. $(M, \vec{\beta})$ düz xətti γ xətti-nin M nöqtəsində *binormalı,* $\vec{\beta}$ vektoru isə *binormalın vahid vektoru* adlanır.

M nöqtəsinin və $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ vektorlarının əmələ gətirdiyi R_M reperi γ xəttinin M nöqtəsində *kanonik reperi* adlanır (bax. şək.1). Buradan aydın olur ki, hamar xəttin əyriliyinin sıfırdan fərqli olduğu hər bir nöqtəsində kanonik reper qurula bilər.

R_M reperinin koordinat müstəviləri aşağıdakı kimi adlan-dırılırlar:

$(M, \vec{\tau}, \vec{\nu})$ – *çoxtoxunan müstəvi* ;

$(M, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ – *normal müstəvi* ;

$(M, \vec{\tau}, \vec{\beta})$ – *düzləndirici müstəvi* .

M nöqtəsinin γ xətti boyunca yerdəyişməsi zamanı R_M reperi də yerini dəyişir. Ona görə də R_M reperinə adətən γ xətti-nin *hərəkətli reperi* deyilir.

3. $\vec{\nu}$ vahid vektor olduğundan, $\frac{d\vec{\nu}}{ds} \perp \vec{\nu}$, ona görə də $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ vektoru düzləndirici müstəviyə paraleldir. Buradan məlum oldur ki, bu vektoru $\vec{\tau}$ və $\vec{\beta}$ vektorları üzrə ayırmaq olar:

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = \alpha\vec{\tau} + \chi\,\vec{\beta}. \tag{8}$$

$\vec{\tau} \cdot \vec{\nu} = 0$ eyniliyini s parametrinə görə diferensiallayaq:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}\vec{\nu} + \vec{\tau}\frac{d\vec{\nu}}{ds} = 0.$$

Əgər bu bərabərlikdə $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ və $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ vektorlarını (7) və (8) düs-turları üzrə əvəz etsək, $\alpha = -k$ münasibətini alarıq. Nəticədə (8) düsturu belə yazılır:

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \chi\,\vec{\beta}. \tag{9}$$

$\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$ eyniliyini s parametrinə görə diferensiallayaq:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \left[\frac{d\vec{\tau}}{ds}, \vec{\nu}\right] + \left[\vec{\tau}, \frac{d\vec{\nu}}{ds}\right].$$

Əgər bu bərabərlikdə $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ və $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ vektorlarını onların (7) və (9) bəra-bərliklərindən olan ifadələri ilə əvəz etsək, yaza bilərik:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\chi\vec{\nu} \quad . \tag{10}$$

χ ədədi γ xəttinin M nöqtəsində *buruqluğu* adlanır. γ xətti boyunca χ dəyişəni s təbii parametrinin funksiyası olur. (10) düsturundan görünür ki, $|\chi| = \left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|$. Digər tərəfdən, $\chi > 0$ olması üçün zəruri və kafi şərt $\vec{\nu}$ və $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ vektorlarının əks istiqa-mətlərə və $\chi < 0$ olması üçün zəruri və kafi şərt $\vec{\nu}$ və $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ vek-torlarının eyni istiqamətə malik olmasıdır. Xəttin buruqluğunun modulunu və işarəsini belə xarakterizə etmək olar.

Beləliklə, *Frene düsturları* adlandırılan aşağıdakı bəra-bərliklər doğrudur:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu},$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \chi\,\vec{\beta},$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\chi\,\vec{\nu}.$$

Qeyd edək ki, hamar xətlər nəzəriyyəsi Frene düstur-larının tətbiqinə əsaslanır.

γ xətti (1) təbii parametrizasiyası ilə verildiyi halda buruqluğun hesablanması düsturunu çıxaraq. Frene düstur-larından birincisini belə yazmaq olar: $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=k\vec{v}$. Bu münasibəti diferensiallayıb, Frene düsturlarından ikincisini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=-k^2\vec{\tau}+\frac{dk}{ds}\vec{v}+k\chi\,\vec{\beta}.$$

Beləliklə, $\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=\vec{\tau}(k\vec{v})(-k^2\vec{\tau}+\frac{dk}{ds}\vec{v}+k\chi\,\vec{\beta})=k^2$. Buradan axtarılan düstur alınır:

$$\chi=\frac{1}{k^2}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right). \qquad (11$$

Mühazirə 9

MÜSTƏVİ XƏTLƏRİ

1. Oxy müstəvisində

$$x=x(t), y=y(t) \qquad (1)$$

parametrik tənlikləri ilə verilən hamar γ əyrisinə baxaq. $\vec{r}'(t)=(x'(t),y(t))\neq 0$ olduğuna görə, riyazi analiz kursundan məlum olan tərs funksiyaya dair teoremə əsasən, (1) tənliklərindən t parametrini yox etməklə

$$F(x,y)=0 \qquad (2)$$

tənliyini alırıq. (2) tənliyinə müstəvi əyrisinin *qeyri-aşkar tənliyi* deyilir. Qeyd edək ki, (2) şəklində olan hər bir tənlik müstəvi əyrisi təyin etmir. (2) tənliyinin müəyyən M_0 nöqtəsinin ətrafında əyri təyin etməsi üçün

$$gra\vec{d}F\Big|_{M_0(x_0,y_0)}=\{F'_x,F'_y\}\Big|_{M_0(x_0,y_0)}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right\}\Big|_{M_0(x_0,y_0)}\neq 0 \qquad (3)$$

şərti ödənilməlidir. Doğrudan da, (3) şərtindən F'_x və F'_y xüsusi törəmələrindən heç olmazsa birinin sıfırdan fərqli olması görünür. $F'_y\Big|_{M_0(x_0,y_0)}\neq 0$ olduğunu fərz edək. Bu halda riyazi analiz kursundan məlum olan qeyri-aşkar funksiyaya dair teoremə əsa-sən M_0 nöqtəsinin yaxın ətrafında diferensiallanan

$$y=f(x) \qquad (4)$$

funksiyasını təyin edirik. (4) bərabərliyi müstəvi əyrisinin *aşkar şəkildə tənliyi* adlanır. Müstəvi əyrisinin (4) tənliyini parametrik olaraq

$$x=x(t), y=f(t)$$

şəklində yaza bilərik. Beləliklə, müstəvi əyrisi lokal olaraq bir-birinə ekvivalent olan

1. $\vec{r}=\vec{r}(t), \quad \vec{r}'\big|_{M_0}\neq 0;$
2. $x=x(t), y=y(t), \quad \{x',y'\}\big|_{M_0}\neq 0;$
3. $F(x,y)=0, \quad \{F'_x,F'_y\}\big|_{M_0}\neq 0;$
4. $y=f(x)$

tənliklərindən hər hansı biri ilə verilə bilər.

2. Tutaq ki, (2) qeyri-aşkar tənliyi ilə müstəvi əyrisi ve-rilmişdir. (2) tənliyi lokal olaraq (1) tənliklərinə ekvivalent olduğundan, $F(x,y)=0$ tənliyindən t dəyişəninə nəzərən

$$F(x(t),y(t))=0$$

eyniliyini alarıq. Bu bərabərliyin hər iki tərəfindən t dəyişəninə görə diferensiallayaq:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0. \qquad (5)$$

$\overrightarrow{gradF} = \{F'_x, F'_y\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right\} \neq 0$ şərtinin ödənildiyi məlumdur. Bu şərt daxilində (5) bərabərliyindən $\frac{dy}{dx}$ nisbətini

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad (F'_y \neq 0) \tag{6}$$

şəklində təyin edə bilərik. (6) münasibətini toxunan düz xəttin

$$\frac{x - x_0}{x'} = \frac{y - y_0}{y'}$$

kanonik tənliyində nəzərə alsaq, bu düz xəttin

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) = 0$$

şəklində olan tənliyini alarıq.

(2) qeyri-aşkar tənliyi ilə verilmiş müstəvi xəttinin

$$F'_x\big|_{M_0(x_0,y_0)} = F'_y\big|_{M_0(x_0,y_0)} = 0$$

münasibətini ödəyən nöqtələrinə onun *məxsusi nöqtələri* deyilir.

3. Əgər $\gamma -$müstəvi xəttidirsə (və onun hər bir nöqtəsində əyriliyi sıfırdan fərqlidirsə-$k \neq 0$), onda $\vec{\tau}$ və $\vec{v}$ vektorları xətti gz üzərində saxlayan müstəviyə paraleldirlər. Bu isə $\vec{\beta}$ vektoru-nun sabit vektor olması deməkdir. Beləliklə,

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = 0 \Rightarrow \chi = 0.$$

Tərsinə, tutaq ki, γ xəttinin hər bir nöqtəsində buruqluq sıfra bərabərdir: $\chi = 0$. Frene düsturlarının üçüncüsündən müəy-yən edirik ki,

$$\vec{\beta} = \vec{b},$$

burada $\vec{b}$ vahid vektoru s təbii parametrindən asılı deyil. $\vec{b} \cdot \vec{\tau} = 0$ eyniliyindən alınır:

$$\frac{d(\vec{b} \cdot \vec{r})}{ds} = 0,$$

ona görə də

$$\vec{b} \cdot \vec{r} = c = const. \tag{7}$$

Ortonormallaşmış $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ reperində

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

olduğunu qəbul etsək, (7) bərabərliyini

$$b_1 x + b_2 y + b_3 z - c = 0 \tag{8}$$

şəklində yaza bilərik. Göründüyü kimi, hər bir $M \in \gamma$ nöqtəsi R reperində (8) tənliyi ilə verilən müstəvi üzərində yerləşir. Bu isə o deməkdir ki, $\gamma -$ müstəvi xəttidir.

Qeyd 1. Müstəvi xətti üçün $\chi = 0$ olduğundan, Frene düsturları aşağıdakı kimi yazılırlar:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{ds} = -k\vec{\tau}\,.$$

Qeyd 2. Məlumdur ki, $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ paramet-rik tənlikləri ilə verilən γ xəttinin əyriliyi

$$k = \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

düsturu ilə hesablanır (bax, XIII mühazirə, bənd 4). Bu düstur-dan görünür ki, əgər γ Oxy müstəvisində yerləşən müstəvi xətti-dirsə, onda

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{9}$$

Müstəvi əyrisi $y = f(x)$ tənliyi ilə verildiyi halda isə onun əyriliyi

$$k = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

düsturu ilə hesablanır.

3. Tutaq ki,

$$F(x, y, C) = 0 \tag{11}$$

tənliyi ilə müstəvi xətləri ailəsi verilmişdir, burada $F-$ arqumentlərinin kəsilməz diferensiallanan funksiyasıdır, $C-$ parametrdir. $x = x(t), y = y(t)$ parametrik tənlikləri ilə verilən γ müstəvi xəttinə baxaq.

3. Hər bir nöqtəsində əyriliyi sıfırdan fərqli olan və $\vec{r} = \vec{r}(s)$ tənliyi ilə verilən hamar γ müstəvi xəttinə baxaq. γ müstəvi xəttinin $M \in \gamma$ nöqtəsi üçün $(M, \vec{v})$ düz xətti bu xəttin M nöqtəsində *normalı* adlanır.

Mühazirə 10

SƏTHIN VERİLMƏ ÜSULLARI, TƏNLİKLƏRİ. HAMAR SƏTHLƏR

1. Əvvəlcə səthlərin öyrənilməsi üçün zəruri olan iki skal-yar arqumentin vektor funksiyası anlayışını daxil edək.

Tutaq ki, $V - R$ həqiqi ədədlər meydanı üzərində üçölçülü Evklid vektor fəzasıdır. *İkiölçülü G aralığı* dedikdə, aşağıdakı çoxluqlarından hər hansı birini başa düşürük: $R^2 = R \times R$ fəzası, $v \geq 0$ şərtini ödəyən bütün $(u, v) \in R^2$ nöqtələrindən təşkil olun-muş R_+^2 qapalı ədədi yarımfəzası və ya $0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq a, a > 0$ şərtlərini ödəyən bütün $(u, v) \in R^2$ nöqtələrindən təşkil olunmuş ədədi kvadrat. Əgər hər bir $(u, v) \in G$ nöqtəsinə müəyyən $\vec{r}(u, v) \in V$ vektorunu qarşı qoyan qayda verilmişdirsə, onda deyirlər ki, ikiölçülü G aralığında *u və v skalyar aqumentlərinin $\vec{r}(u, v)$ vektor-funksiyası* təyin olunmuşdur. Aşkardır ki, $|\vec{r}(u, v)|$ eyni arqumentlərin ədədi funksiyasıdır.

$|\vec{r}(u, v)|$ ədədi funksiyası $(u_0, v_0) \in G$ nöqtəsinin yaxın ətrafında sonsuz kiçik olduqda, yəni $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} |\vec{r}(u, v)| = 0$ şərti ödənildikdə, $\vec{r}(u, v)$ vektor-funksiyası (u_0, v_0) nöqtəsinin yaxın ətrafında *sonsuz kiçik vektor-funksiya* adlanır.

Sabit $\vec{a} \in V$ vektoru üçün $\vec{r}(u, v) - \vec{a}$ (u_0, v_0) nöqtəsinin yaxın ətrafında sonsuz kiçik olduqda deyirlər ki, $\vec{a}$ vektoru $(u, v) \to (u_0, v_0)$ olduqda $\vec{r}(u, v)$ vektor-funksiyasının *limitidir.* Bu halda belə yazırlar: $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{a}$.

$\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{r}(u_0, v_0)$ şərti ödənildikdə $\vec{r}(u, v)$ vektor - funksiyasına $(u_0, v_0) \in G$ nöqtəsində *kəsilməz* vektor- funksiya deyilir. G aralığının hər bir nöqtəsində kəsilməz olan $\vec{r}(u, v)$ vektor-funksiyasına *bu aralıqda kəsilməz olan* vektor-funksiya deyilir.

G aralığında verilmiş $\vec{r}(u, v)$ vektor-funksiyasına baxaq. V vektor fəzasının ortonormallaşmış hər hansı $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisini götürək və hər bir $(u, v) \in G$ nöqtəsində $\vec{r}(u, v)$ vektorunu bu bazisin vektorları üzrə ayıraq:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \,. \tag{1}$$

(1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ funksiyaları u, v arqumentlərinin G aralığında təyin olunmuş funksiyalardır. Bu funksiyalara *$\vec{r}(u, v)$ vektor-funksiyasının $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisində koordinatları* deyilir.

Tutaq ki, $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{a}$ və $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Onda $(u, v) \to (u_0, v_0)$ şərti daxilində aşağıdakılar doğrudur:

$$\lim x(u,v) = a_1,\ \lim y(u,v) = a_2,\ \lim z(u,v) = a_3 .$$

Əgər $v = v_0 = const$ qəbul etsək, onda u arqumentinin $(u,v_0) \in G$ şərtini ödəyən müxtəlif qiymətləri üçün $\vec{r}(u,v)$ bir skalyar arqumentin $\vec{r}(u,v_0)$ vektor-funksiyası olar. Əgər $\vec{r}(u,v_0)$ vektor-funksiyasının u dəyişəninə nəzərən $\dfrac{d\vec{r}(u,v_0)}{du}$ törəməsi vardırsa, onda bu törəməyə $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyasının u dəyişəninə nəzərən *xüsusi törəməsi* (*birinci tərtib*) deyilir və $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, yaxud $\vec{r}_u$ kimi işarə olunur. Analoji olaraq, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v$ xüsusi törə-məsi təyin təyin olunur.

(1) ayrılışından alınır ki, $\vec{r}(u,v_0)$ vektor-funksiyasının koordinatları $x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0)$ funksiyalarıdır, ona görə də mühazirə 10-da verilən teorem 1-ə əsasən $(u,v) \in G$ nöqtəsində $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ xüsusi törəmələrinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt bun öq-tədə uyğun olaraq,

$$x_u = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, y_u = \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, z_u = \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}$$

və

$$x_v = \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, y_v = \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, z_v = \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}$$

törəmələrinin varlığıdır. Qeyd olunan teoremdən həm də alınır ki,

$$\vec{r}_u = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k} \text{ və } \vec{r}_v = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}. \qquad (2)$$

(1) ayrılışının sağ tərəfindəki $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ funk-siyaları $(u,v) \in G$ nöqtəsində diferensiallanan olduqları halda

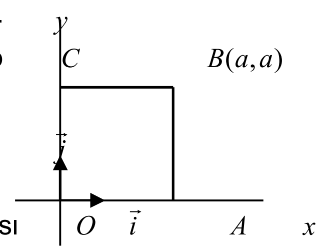
$$d\vec{r} = dx(u,v)\vec{i} + dy(u,v)\vec{j} + dz(u,v)\vec{k} \qquad (3)$$

vektoruna $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyasının (u,v) nöqtəsində *dife-rensialı* deyilir. (2) düsturlarının köməyi ilə müəyyən etmək olur ki,

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv . \qquad (4)$$

$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ funksiyaları (u,v) nöqtəsində diferensialla-nan olduqda deyirlər ki, $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyası (u,v) *nöqtə-sində diferensiallanandır.* G aralığının hər bir nöqtəsində difrensi-allanan olan $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyasına G *aralığında diferen-siallanan* vektor-funksiya deyilir.

2. E_2 Evklid müstəvisi üzərində düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemini da-xil edək (şək.1). Aşağıdakı qayda ilə $E_2 \to R^2$ biyektiv inikasını təyin edək: $M(x,y) \in E_2$ nöqtəsinə $(x,y) \in R^2$ nöq-təsini qarşı qoyuruq. Bu homeomorfiz-mə əsasən R^2 ədədi fəzasını E_2 fəzası ilə, R^2_+ ədədi yarımfəzasını Oxy müs-təvisinin $y \geq 0$ şərti ilə təyin olunan qa-palı yarımmüstəvisi ilə, ədədi kvadratı isə $OABC$ kvadratı ilə eyniləşdirək, burada B nöqtəsinin $B(a,a)$ koordinatları vardır (şək.1).



Şəkil 1

Aşağıdakı fiqurlardan hər hansı birinə üçölçülü E_3 Evklid fəzasında *sadə səth* deyilir: müstəvi, qapalı yarımmüstəvi, kvadrat.

Sadə səthlərdən istənilən birinə homeomorf olan fiqur *ele-mentar səth* adlanır. Məsələn, elliptik və hiperbolik paraboloidlər, parabolik silindr müstəviyə homeomorf olduqları üçün elementar səthlərdir. Sərhəddi ilə bərabər götürülən yarımsfera da elementar səthdir (dairəyə homeomorf olduğu üçün).

Yuxarıdakılara əsasən belə bir nəticəyə gəlmək olar: $F \subset E_3$ *fiquru müəyyən ikiölçülü* $G \subset R^2$ *aralığına homeomorf ol-duqda elementar səth adlanır.*

E_3 Evklid fəzasında elementar səthlərin sonlu və ya hesabi çoxluğu ilə örtülə bilən fiqura *səth* deyilir. Tərifdən alınır ki, F səthinin M nöqtəsi üçün elə F_0 elementar səthi vardır ki, $M \in F_0 \subset F$.

Hər bir elementar səthin özü səthdir. Lakin elementar səth olmayan səthlər də vadır. Belə səthlərə aşağıdakıları nümunə olaraq göstərə bilərik:

1) sfera (onu iki yarımsfera ilə örtmək mümkündür);
2) ellipsoid (bu səth sferaya homeomorfdur);
3) elliptik silindr (onu hər biri müstəviyə homeomorf olan sonlu sayda «silindrik zolaq»larla örtmək olar);
4) biroyuqlu hiperboloid (bu səth elliptik silindrə homeomorfdur).

3. E_3 Evklid fəzasında düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat siste-mini daxil edək və ikiölçülü G aralığını F_0 elementar səthinə çevirən $f: G \to F_0$ homeomorfizminə baxaq. Əgər $(u,v) \in G$ nöqtəsi $M(x,y,z) \in F_0$ nöqtəsinə çevrilirsə, onda aşkardır ki, x,y,z koordinatları u,v dəyişənlərinin, G aralığında təyin olunan funksiyalarıdır:

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v) . \qquad (5)$$

(5) tənliklərinə F_0 elementar səthinin *parametrik tənlikləri* deyilir. Bu tənliklər

$$\vec{r} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \qquad (6)$$

vektor tənliyinə ekvivalentdirlər, burada $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \overrightarrow{OM}$ - M nöqtəsinin radius-vektorudur. (6) tənliyinin sağ tərəfini $\vec{r}(u,v)$ ilə işarə etməklə, bu tənliyi

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (7)$$

şəklində yazmaq olar, burada $\vec{r}(u,v) - u,v$ skalyar arqument-lərinin G aralığında təyin olunan vektor- funksiyasıdır.

4. Tutaq ki, $F_0 -$(5) parametrik tənlikləri ilə verilən elementar səthdir, belə ki, $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ G ikiölçülü ara-lığında təyin olunmuş funksiyalardır. Əgər (5) tənliklərinin sağ tərəfləri G aralığında $k-$cı ($k-$natural ədəddir) tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələri olan funksiyalardırsa və hər bir $(u,v) \in G$ nöqtəsində

$$rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2 \qquad (8)$$

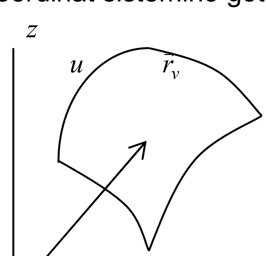
olarsa, onda F_0 səthinə C^k *sinifindən olan hamar* elementar səth deyilir.

Qeyd etdiyimiz kimi, (5) parametrik tənlikləri (7) vektor tənliyinə ekvivalentdirlər. Digər tərəfdən, $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiya-sının $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ xüsusi törəmələri üçün (2) bərabərlikləri doğrudur. Ona görə də (8) şərtinin həndəsi mənası ondan ibarətdir ki, $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorları G ikiölçülü aralığında xətti asılı deyil, yəni istənilən $(u,v) \in G$ nöqtəsində $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ vektoru sıfır vektordan fərqlidir.

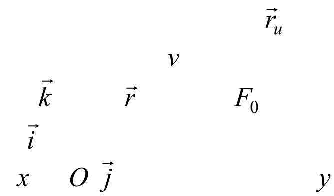
Əgər (5) tənliklərində $v = v_0 = const$ qəbul edərək, $(u, v_0) \in G$ şərti daxilində yalnız u arqumentini dəyişsək, bir skalyar u arqumentinin $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ vektor-funksiyasını alarıq və ona görə də $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ bərabərliyini ödəyən bütün M nöqtələri çoxluğu F_0 elementar səthi üzərində yerləşən müəyyən hamar xətt təyin edər. Bu xətti u *xətti* adlandırırıq. $\vec{r}_u$ vektoru (u, v_0) nöqtə-sində u xəttinə toxunan vektordur. Analoji olaraq, hər bir $M \in F_0$ nöqtəsindən hamar $u = const$ və ya v *xətti* keçir. Əgər $(u,v) \in G$ nöqtəsi məlumdursa, onda (5) düsturlarına görə $M(x,y,z) \in F_0$ nöqtəsini təyin etmək olur. Deməli, u və v para-metrləri səth üzərindəki nöqtələri birqiymətli təyin edirlər. Məhz bu səbəbdən u və v parametrlərinə F_0 səthi üzərindəki M nöqtə-sinin *əyrixətli koordinatları* deyilir.

Beləliklə, (5) tənlikləri (yəni $f: G \to F_0$ homeomorfizmi) ilə F_0 səthinin parametrizasiyası bu səth üzərində məyyən əyri-xətli u,v koordinat sisteminə gətirir.

Bundan başqa, u xətləri ailəsi və v xətləri ailəsi F_0 səthini elə örtürlər ki,



hər bir $M \in F_0$ nöqtəsindən müxtəlif istiqamətlərdə yalnız bir u xətti və yalnız bir v xətti keçir (bu xətlərə M nöqtəsində toxunan $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorları kollinear deyil). Bu halda deyirlər ki, u və v xətləri səth üzərində koordinat şəbəkəsi əmələ gətirirlər. (şək. 2).



Şəkil 2

Hamar xəttə dair nümunəyə baxaq. Tutaq ki, düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemində

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = bv \tag{9}$$

parametrik tənlikləri ilə səth verilmişdir, burada $b > 0, (u,v) \in R^2$. Bu səth üçün

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & o \\ -u\sin v & u\cos v & b \end{pmatrix}$$

olduğundan, hər bir $(u,v) \in R^2$ nöqtəsində (8) şərti ödənilir. Baxı-lan səth C^∞ sinifindən olan hamar səthdir ($x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ funksiyalarının u, v arqumentlərinə nəzərən istənilən tərtibdən kəsilməz xüsusi törəmələri vardır). Bu səthə *düz helikoid* deyilir.

Mühazirə 11

SƏTHƏ TOXUNAN MÜSTƏVİ VƏ NORMAL

1. Tutaq ki, $G \subset R^2$ ikiölçülü aralığında

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \tag{1}$$

vektor tənliyi ilə C^k sinifindən olan hamar F səthi təyin olunmuşdur.

$$u = u(t), v = v(t) \tag{2}$$

qəbul edək, burada t müəyyən $I \subset R$ aralığında elə dəyişir ki, ixtiyari $t \in I$ üçün $(u(t), v(t)) \in G.$

Biz I aralığında $u(t)$ və $v(t)$ funksiyalarının $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələrinin varlığını və bu aralıqdan olan bütün nöqtələrdə $\frac{du}{dt}$ və $\frac{dv}{dt}$ törəmələrinin eyni vaxtda sıfıra bərabər olmadığını tələb edirik.

u və v dəyişənlərinin (2) ifadələrini (1) tənliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)). \tag{3}$$

(3) tənliyinin sağ tərəfi bir skalyar t arqumentinin müəyyən vektor-funksiyasıdır. Bu funksiyanı $\vec{r}^*(t)$ ilə işarə edək və (3) tənliyini belə yazaq:

$$\vec{r} = \vec{r}^*(t). \tag{4}$$

(4) tənliyi F səthi üzərində yerləşən və C^k sinifindən olan xətt təyin edir.

Tərsinə: F səthi üzərində yerləşən və C^k sinifindən olan istənilən hamar xətt (2) tənlikləri ilə təyin oluna bilər. Burada $u(t)$ və $v(t)$ $(u(t), v(t)) \in G$ şərtini ödəyən müəyyən I aralığında verilmiş funksiyalardır, $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz törəmələrə malikdirlər və $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ törəmələri $I-$dən olan heç bir nöqtədə eyni vaxtda sıfra bərabər olmurlar.

(2) tənliklərinə F səthi üzərində yerləşən xəttin *daxili tənlikləri* deyilir.

2. Bilirik ki, C^k sinifindən olan və (1) tənliyi ilə verilən hamar F səthinin hər bir M_0 nöqtəsində $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ xətti asılı olmayan vektorlardır. M_0 nöqtəsindən $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorlarına paralel keçən müstəvini $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ ilə işarə edək.

Teorem 1. *Tutaq ki,* $M_0(u_0, v_0)-$*(1) tənliyi ilə verilən və* C^k *sinifindən olan* F *səthi üzərində nöqtədir. Onda* F *səthi üzərin-də yerləşən və* M_0 *nöqtəsindən keçən bütün hamar* *xətlərə bu nöqtədə toxunan düz xətlər çoxluğu* $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ *müstəvisinin* M_0 *mərkəzli düz xətlər dəstəsini əmələ gətirir.*

İsbatı. F səthi üzərində yerləşən və M_0 nöqtəsindən keçən ixtiyari hamar γ xəttinə baxaq və fərz edək ki, bu xətt (2) daxili tənlikləri ilə təyin olunmuşdur. M_0 nöqtəsinin parametrini t_0 ilə işarə edək:

$$u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0)\ .$$

γ xəttinə M_0 nöqtəsində toxunan vektoru tapaq. (3) tən-liyindən alırıq: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}$, burada $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ xüsusi törəmələri (u_0, v_0) nöqtəsində, $\frac{du}{dt}$ və $\frac{dv}{dt}$ törəmələri isə t_0 nöqtəsində hesab-lanmışdır. Buradan alınır ki, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ vektoru $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ müstəvisinə para-leldir, ona görə də γ xəttinə M_0 nöqtəsində toxunan düz xətt bu müstəvi üzərində yerləşir.

Tərsinə: tutaq ki, $(M_0, \vec{a}) - (M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ müstəvisinin M_0 nöqtəsindən keçən ixtiyari düz xəttidir. Onda aşkardır ki, $\vec{a} = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v$, burada α və β eyni vaxtda sıfıra bərabər olmayan ədədlərdir. F səthi üzərində yerləşən və $u = u_0 + \alpha t, v = v_0 + \beta t$ tənlikləri ilə verilən γ_1 xəttinə baxaq, burada t müəyyən aralıqda elə dəyişir ki, $(u,v) \in G$. $\vec{r} = \vec{r}(u_0 + \alpha t, v_0 + \beta t)$ tənliyi ilə γ_1 xətti fəzada təyin olunur. γ_1 xəttinə M_0 nöqtəsində toxunan vektoru tapaq:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}\ .$$

$\frac{du}{dt} = \alpha, \frac{dv}{dt} = \beta$ olduğundan, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}$. Deməli, γ_1 xəttinə M_0 nöq-təsində toxunan düz xətt $(M_0, \vec{a})$ düz xətti ilə üst-üstə düşür. ■

F səthi üzərində yerləşən və M_0 nöqtəsindən keçən bütün hamar xətlərə toxunan düz xətlərin yerləşdikləri müstəviyə F səthinə M_0 nöqtəsində *toxunan müstəvi* deyilir. İsbat etdiyimiz teorem 1-ə görə bu müstəvi M_0 nöqtəsi və kollinear olmayan $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorları ilə təyin olunur.

$M_0 \in F$ nöqtəsindən toxunan müstəviyə perpendikulyar keçən düz xətt F hamar səthinə M_0 nöqtəsində normal düz xətti adlanır. $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ vektoru kollinear olmayan və F səthinə M_0 nöqtəsində toxunan müstəviyə paralel olan $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorlarına perpen-dikulyardır. Bu o deməkdir ki, $\vec{N}$ vektoru toxunan müstəvinin özünə də perpendikulyardır. Deməli, $(M_0, \vec{N})$ *düz xətti* F *səthinə* M_0 *nöqtəsində normal düz xətdir.*

3. Tutaq ki, F səthinə toxunan müstəviyə perpendikulyar olan $\vec{N}$ vektorunun düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemində (N_1, N_2, N_3) koordinatları vardır. Onda bu səthə $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində toxunan müstəvi

$$(x - x_0)N_1 + (y - y_0)N_2 + (z - z_0)N_3 = 0 \tag{5}$$

tənliyi ilə təyin olunar.

Səthə M_0 nöqtəsində normal düz xətt isə aşağıdakı kanonik tənliklərlə təyin olunar:

$$\frac{x - x_0}{N_1} = \frac{y - y_0}{N_2} = \frac{z - z_0}{N_3}. \tag{6}$$

Hamar F səthi parametrik tənliklərlə verildiyi halda $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ olduğuna görə, əvvəlcə $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$ və $\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$ vektorları təyin olunur, sonra isə (5) və (6) tənlikləri yazılır. Bu halda (5) və (6) tənlikləri belə yazılar:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0\ ,$$

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} .$$

Əgər F səthi qeyri-aşkar tənliklə verilmişdirsə, onda toxunan müstəvi və normalın tənliklərini yazmaq üçün aşağıdakı teoremdən istifadə etmək lazımdır.

Teorem 2. *Əgər hamar səth qeyri-aşkar* $F(x,y,z)=0$ *tənliyi ilə verilmişdirsə, onda* $\vec{N}(F_x,F_y,F_z)$ *vektoru sıfırdan fərqli vektor olub, həmin səthə uyğun nöqtədə toxunan müs-təviyə perpendikulyardır.*

İsbatı. Verilmiş səth hamar olduğundan, $rang\left\|F_x,F_y,F_z\right\|=1,$ ona görə də $\vec{N}-$sıfırdan fərqli vektordur. Göstərək ki, $\vec{N}$ vektoru səthə M_0 nöqtəsində toxunan müs-təviyə perpendikulyardır. Bundan ötrü $\vec{N}$ vektorunun verilmiş səth üzərində yerləşən və M_0 nöqtəsindən keçən ixtiyari hamar γ xəttinə bu nöqtədə toxunan düz xəttə perpendikulyar olduğunu əsaslandırmaq lazımdır.

Tutaq ki, γ xətti $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ tənlikləri ilə verilmişdir. Aydındır ki, γ xəttinin parametri t olan istənilən nöqtəsində $F(x(t),y(t),z(t))=0$ bərabərliyi ödənilir. Bu eyniliyi t dəyişəninə görə diferensiallasaq, alarıq:

$$F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_x\frac{dz}{dt}=0 .$$

Bu bərabərlik M_0 nöqtəsində də doğrudur, deməli, $\vec{N}$ vektoru M_0 nöqtəsində γ xəttinə toxunan $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$ vektoruna perpen-dikulyardır.

Səthə[redacted]toxunan müstəvi və normalın tənliklərinin tapılması ilə bağlı məsələ həlli nümunələrinə baxaq.

Məsələ 1. $x=u\cos v, y=u\sin v, z=bv, b>0, (u,v)\in R^2$ tənlikləri ilə verilmiş düz helikoidə $M_0(u_0,v_0)$ nöqtəsində toxunan müstəvinin və normalın tənliklərini yazın.

Həlli. $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorlarının M_0 nöqtəsində

$$\vec{r}_u(\cos v_0,\sin v_0,0) \text{ və } \vec{r}_v(-u_0\sin v_0,u_0\cos v_0,b)$$

koordinatları vardır. Ona görə də $\vec{N}=[\vec{r}_u,\vec{r}_v]$ vektoru aşağıdakı koordinatlara malik olar:

$$\vec{N}=\left(\begin{vmatrix} \sin v_0 & 0 \\ u_0\cos v_0 & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & \cos v_0 \\ b & -u_0\sin v_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos v_0 & \sin v_0 \\ -u_0\sin v_0 & u_0\cos v_0 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(b\sin v_0,-b\cos v_0,u_0\right).$$

(5) düsturuna əsasən toxunan müstəvinin tənliyini yazaq:

$$(x-x_0)b\sin v_0-(y-y_0)b\cos v_0+(z-z_0)u_0=0 . \qquad (7)$$

$x_0=u_0\cos v_0, y_0=u_0\sin v_0, z_0=bv_0$ olduğunu nəzərə alsaq, ele-mentar çevirmələrin köməyi ilə (7) tənliyini

$$xb\sin v_0-yb\cos v_0+zu_0-bu_0v_0=0$$

şəklinə gətirmiş oluruq.

M_0 nöqtəsində normalın tənliyini isə (6) tənliyinə əsasən yazırıq:

$$\frac{x-u_0\cos v_0}{b\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-b\cos v_0}=\frac{z-bv_0}{u_0} .$$

Məsələ 2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ kanonik tənliyi ilə verilmiş ellipsoidə $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nöqtəsində toxunan müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli. İsbat etdiyimiz teorem 2-yə görə ellipsoidə $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində toxunan müstəviyə perpendikulyar olan $\vec{N}$ vektorunun $\vec{N}\left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right)$ koordinatları vardır. Ona görə də (5) tənliyi belə yazılar:

$$(x-x_0)\frac{2x_0}{a^2}+(y-y_0)\frac{2y_0}{b^2}+(z-z_0)\frac{2z_0}{c^2}=0. \qquad (8)$$

M_0 nöqtəsi ellipsoid üzərində yerləşdiyindən,

$\frac{x_0^{\;2}}{a^2}+\frac{y_0^{\;2}}{b^2}+\frac{z_0^{\;2}}{c^2}=1$ bərabərliyi ödənilir. Nəticədə (8) tənliyi

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$$

şəklində yazılır.

Xüsusi halda $x^2+y^2+z^2=1$ tənliyi ilə verilmiş a radiuslu sferaya toxunan müstəvinin tənliyi $xx_0+yy_0+zz_0=1$ şəklindədir.

Məsələ 3. $xyz=1$ səthinə elə toxunan müstəvi keçirin ki, $x+y+z-3=0$ müstəvisinə paralel olsun.

Həlli. Verilmiş səth üçün $F(x,y,z)=xyz-1$ olduğundan, $\vec{N}=(F_x, F_y, F_z)=(yz, xz, xy)$. Tutaq ki, toxunma nöqtəsi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsidir. Onda $\vec{N}=(y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)$. Toxunan müstəvinin (5) tənliyini yazaq:

$$(x-x_0)y_0z_0+(y-y_0)x_0z_0+(z-z_0)x_0y_0=0. \qquad (9)$$

M_0 nöqtəsi səth üzərində yerləşdiyindən, $x_0y_0z_0=1$. Bu münasibəti nəzərə alsaq, (9) tənliyi belə yazılar:

$$xy_0z_0+yx_0z_0+zx_0y_0-3=0. \qquad (10)$$

(10) müstəvisinin $x+y+z-3=0$ müstəvisinə paralellik şərtlərini ya-zaq: $\frac{y_0z_0}{1}=\frac{x_0z_0}{1}=\frac{x_0y_0}{1}$ və ya $y_0z_0=x_0z_0=x_0y_0$. Bu bərabərliklər-dən və $x_0y_0z_0=1$ şərtindən müəyyən edirik ki, $x_0=y_0=z_0=1$. Be-ləliklə, axtarılan toxunan müstəvi $x+y+z-3=0$ müstəvisinin özüdür.

Mühazirə 12

SƏTHİN BİRİNCİ KVADRATİK FORMASI

1. Tutaq ki, hamar F hamar səthi

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v) \qquad (1)$$

tənliyi ilə verilmişdir. Məlumdur ki, istənilən $M\in F$ nöqtəsində $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyasının diferensialı $d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv$ ifadəsinə malikdir (bax, mühazirə 15, bənd 1, (4) düsturu).

(1) düsturundan alırıq ki,

$$(d\vec{r})^2=(\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv)\cdot(\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv)=g_{11}(du)^2+2g_{12}dudv+g_{22}(dv)^2, \qquad (2)$$

burada

$$g_{11}=\vec{r}_u^{\,2},\; g_{12}=g_{21}=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v,\; g_{22}=\vec{r}_v^{\,2} \qquad (3)$$

işarə olunmuşdur.

(2) düsturunun sağ tərəfi F hamar səthinə M nöqtəsində to-xunan $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ müstəvisində təyin olunan kvadratik formadır. Bu kvadratik formanı φ_1 ilə işarə edir və F hamar səthinin *birinci kvadratik forması*, yaxud *xətti elementi* adlandırırlar. $d\vec{r}\neq\vec{0}$ olduğuna görə (F hamar səthdir), $(d\vec{r})^2>0$. Bu isə onu göstərir ki, φ_1 kvadratik forması müsbət-müəyyən formadır.

Qeyd edək ki, $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorları F səthi üzərində M nöqtəsi-nin u və v əyrixətli koordinatlarının vektor-funksiyalarıdır. Ona görə də φ_1 kvadratik formasının (3) əmsalları da u və v əyrixətli koordinat-larının funksiyalarıdır.

(1) tənliyi ilə verilən F səthi üzərində yerləşən hamar

$$u = u(t), \quad v = v(t) \tag{4}$$

γ xəttinə baxaq, burada t parametri müəyyən I aralığında dəyişir. γ xətti fəzada $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ tənliyi ilə verilir. Bu tənliyi t parametrinə görə diferensiallamaqla, alırıq:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}. \tag{5}$$

Xətlər nəzəriyyəsindən məlumdur ki, $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$, burada s γ xəttinin qövs uzunluğudur (bax, mühazirə 12, bənd 2, (7) düsturu). Bu düsturdan (3) və (5) bərabərliklərinə əsasən alırıq:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2} = \sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{11}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}. \tag{6}$$

(6) bərabərliyindən aydın olur ki,

$$(ds)^2 = g_{11}(du)^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}(dv)^2. \tag{7}$$

Beləliklə, *səthin birinci kvadratik formasının qiyməti səth üzərin-də yerləşən hamar xətt üzrə nöqtənin sonsuz kiçik yerdəyişməsi zamanı bu xəttin qövs uzunluğunun diferensialının kvadratına bərabərdir.*

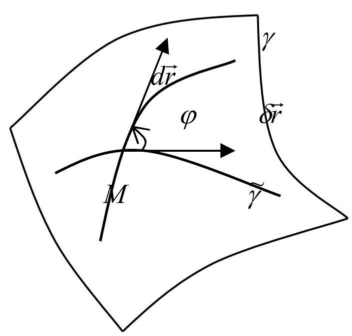
(6) düsturundan γ xəttinin ucları $M_1(t_1)$ və $M_2(t_2)$ ($t_1 < t_2$) nöqtələrində olan qövsünün uzunluğunu hesablamaq üçün aşağıdakı düstur alınır:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{11}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{8}$$

2. Tutaq ki, γ və $\tilde{\gamma}$ - F səthi üzərində yerləşən və M nöqtəsin-dən keçən hamar xətlərdir. *γ və $\tilde{\gamma}$ xətləri arasında qalan bucaq dedikdə bu xətlərə onların ortaq M nöqtəsində çəkilən toxunanlar arasındakı bucaq ğaşa düşülür.*

γ və $\tilde{\gamma}$ xətləri boyunca dife-rensiallamaları d və δ ilə işarə edək. Deməli, γ və $\tilde{\gamma}$ xətlərinə M nöqtə-sində toxunan vektorlar $d\vec{r}$ və $\delta\vec{r}$ vektorlarıdır (şək. 1). γ və $\tilde{\gamma}$ xətlə-ri arasındakı φ bucağını $d\vec{r}$ və $\delta\vec{r}$ vektorları arasında qalan bucaq ki-mi hesablamaq olar:

$$\cos\varphi = \frac{d\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{|d\vec{r}||\delta\vec{r}|}. \tag{9}$$



Şəkil 1

Aşkardır ki,

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \quad \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v.$$

Bu qiymətləri (9) düsturunda yerinə yazıb, (3) bərabərliklərini nəzərə alaq:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)\cdot(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v)}{\sqrt{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2}\sqrt{(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v dv)^2}} =$$

$$= \frac{g_{11}du\delta u + g_{12}(du\delta v + dv\delta u) + g_{22}dv\delta v}{\sqrt{g_{11}(du)^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}(du)^2}\sqrt{g_{11}(\delta u)^2 + 2g_{12}\delta u\delta v + g_{22}(\delta v)^2}}. \tag{10}$$

(10) düsturu, xüsusi halda, səthin koordinat xətləri arasında qalan bucağı hesablamağa imkan verir. Tutaq ki, γ - səthin u xəttidir (yəni $dv = 0$ şərtini ödəyir), $\tilde{\gamma}$ isə səthin v xəttidir (yəni $\delta u = 0$ şərtini ödəyir). Onda $dv = 0$ və $\delta u = 0$ şərtlərini (10) düsturunda nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\cos\varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}. \qquad (11)$$

(11) düsturundan aşağıdakı mühüm nəticə alınır: *Səth üzərində koordinat şəbəkəsinin ortoqonal olması üçün* $(\varphi = \frac{\pi}{2})$ *zəruri və kafi şərt bu səthin hər bir nöqtəsində* $\gamma_{12} = 0$ *bərabərliyinin ödənilməsidir.*

3. Əgər F hamar səthi düzbucaqlı dekart koordinat sistemində $F(x, y, z) = 0$ (12)
qeyri-aşkar tənliyi ilə verilmişdirsə, onda bu səthin $\varphi_1 -$ birinci kvad-ratik forması (12) şərti daxilində $dx^2 + dy^2 + dz^2$ kvadratik forması olur. (12) bərabərliyini diferensiallamaqla, alırıq:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0. \qquad (13)$$

Əgər səthin baxılan nöqtəsində $F_z \neq 0$ olarsa, onda (13) bəra-bərliyindən yaza bilərik:

$$dz = -\left(\frac{F_x}{F_z}\right)dx - \left(\frac{F_y}{F_z}\right)dy.$$

Ona görə də (12) səthi üzərində birinci kvadratik forma $x = u, y = v$ şərtləri daxilində aşağıdakı ifadəyə malikdir:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\left(\frac{F_x}{F_z}\right)dx + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)dy\right)^2. \qquad (14)$$

(14) bərabərliyindən müəyyən edirik:

$$g_{11} = 1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}, \quad g_{12} = \frac{F_x F_y}{F_z^2}, \quad g_{22} = 1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}, \qquad (15)$$

burada $x = u,\ y = v.$

Əgər F hamar səthi $z = f(x, y)$ tənliyi ilə verilmişdirsə, onda bu səth $x = u, y = v, z = f(u, v)$ parametrik tənliklərinə malik olur. Bu halda $\vec{r}_u = \vec{r}_x = (1, 0, f_x), \vec{r}_v = \vec{r}_y = (0, 1, f_y)$ olduğuna görə, birinci kvadra-tik forma əmsalları aşağıdakı kimi hesablanırlar:

$$g_{11} = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = \vec{r}_x \vec{r}_y = f_x f_y, \quad g_{22} = 1 + f_y^2. \qquad (16)$$

4. Tutaq ki, $F -$ hamar səthdir. Bu səthi kiçik k oblastlarına ayıraq. Bu oblastlardan hər birinin üzərində hər-hansı P nöqtəsini götürək və k oblastını P nöqtəsindəki toxunan müstəviyə proyek-siyalayaq. Tutaq ki, $\sigma(k) - k$ oblastının proyeksiyasının sahəsidir. F *səthinin sahəsi* dedikdə, F səthinin bölündüyü k oblastlarının ölçülə-rinə görə qeyri məhdud olaraq kiçilməsi şərti daxilində

$$S = \lim \sum_k \sigma(k)$$

limiti başa düşülür.

F hamar səthinin (1) parametrik tənliyi ilə verildiyi halda onun sahəsinin düsturunu çıxaraq. P nöqtəsini koordinat başlanğıcı, bu nöqtədəki (P, r_u, r_v) toxunan müstəvisini isə xy müstəvisi qəbul etməklə x, y, z düzbucaqlı dekart koordinatlarını daxil edək. Tutaq ki, bu koordinatlarda F səthi k oblastında

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$$

tənlikləri ilə verilir.

k oblastının kafi qədər kiçik ölçülərində onun toxunan müs-təviyə (yəni xy müstəvisinə) proyeksiyası birqiymətlidir, ona görə də proyeksiya üzərində u, v dəyişənlərinə əyrixətli koordinatlar kimi baxıla bilər. Riyazi analiz kursundan məlumdur ki, müstəvi oblastının sahəsi əyrixətli koordinatlarda

$$\sigma = \iint \left| \begin{vmatrix} x_u & y_v \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| du dv \qquad (17)$$

düsturu ilə hesablanır.

(17) düsturundakı inteqralaltı ifadəni

$$\left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| = \left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \cdot \vec{n}_P \right|$$

şəklində yazmaq olar, burada $\vec{n}_P - P$ nöqtəsində səthin normalının vahid vektorudur: $\vec{n}_P = \pm(0,0,1)$. Nəticədə

$$\sum_k \sigma(k) = \iint_F \left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \cdot \vec{n}^* \right| dudv$$

bərabərliyini yaza bilərik, burada $\vec{n}^* -$ səth üzərində elə vektor-funk-siyadır ki, k oblastlarından hər birində sabit olub, bu oblastda qeyd olunmuş P nöqtəsində normalın vahid vektoruna bərabərdir. Əgər sonuncu bərabərlikdə k oblastlarının ölçülərinə görə kiçilməsi şərti daxilində limitə keçsək, səthin sahəsi üçün

$$S = \iint_F \left| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \cdot \vec{n} \right| dudv \tag{18}$$

düsturunu alarıq, burada $\vec{n} -$ səthin normalının vahid vektorudur.

$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] -$ səthin normalının yönəldici vektoru olduğundan, $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ və $\vec{n}$ vektorları kollineardırlar. Ona görə də (18) düsturunu

$$S = \iint_F \left\| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right\| dudv \tag{19}$$

şəklində yazmaq olar.

Göstərək ki, F səthinin hər bir (u,v) nöqtəsində

$$\left\| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right\| = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\ . \tag{20}$$

Doğrudan da, əgər $\varphi = \vec{r}_u \hat{\ } \vec{r}_v$ qəbul etsək, onda

$$\left\| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right\| = |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \sin\varphi = |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \sqrt{1 - \cos^2\varphi}\ .$$

Buradan (3) və (11) düsturlarından istifadə etməklə alarıq:

$$\left\| [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \right\| = \sqrt{\vec{r}_u^{\,2}} \sqrt{\vec{r}_v^{\,2}} \sqrt{1 - \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \right)^2} = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\ .$$

Beləliklə, (20) bərabərliyinə əsasən F səthinin sahəsinin hesab-lanması üçün

$$S = \iint_F \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\, dudv \tag{21}$$

düsturunu yaza bilərik.

Əgər F hamar səthi $z = f(x,y)$ tənliyi ilə verilərsə, onda (16) və (21) düsturlarından istifadə etməklə, F səthinin sahəsini hesablamaq üçün

$$S = \iint \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$$

düsturunu alarıq.

Qeyd. Yuxarıdakılardan aydın olur ki, səthin birinci kvadratik formasını bilməklə metrik xarakterli aşağıdakı məsələləri həll etmək mümkündür:

1. Səth üzərində yerləşən hamar xəttin qövs uzunluğunun hesab-lanması;
2. Səth üzərində yerləşən və ortaq nöqtəyə malik olan iki hamar xətt arasında qalan bucağın hesablanması;
3. Hamar səthin sahəsinin hesablanması.

Birinci kvadratik formanın qeyd olunan tətbiqlərini nəzərə almaqla onu verilmiş *səthin metrik forması* da adlandırırlar.

Mühazirə 13

SƏTHİN İKİNCİ KVADRATİK FORMASI. SƏTH ÜZƏRİNDƏKİ XƏTTİN NORMAL ƏYRİLİYİ

1. Tutaq ki, C^k $(k > 0)$ sinifindən olan hamar F səthi

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \tag{1}$$

tənliyi ilə verilmişdir. Bu səth üzərində yerləşən γ xəttinə baxaq (şək.1). M nöqtəsi γ xətti boyunca yerinidəyişdikdə $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ bərabər-liyi doğru olur. Bu bərabərlikdən alırıq:

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}(du)^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}(dv)^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v\,, \qquad (2)$$

burada $\vec{r}_{uu} = \dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^2}, \vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu} = \dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial u\partial v}, \vec{r}_{vv} = \dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial v^2}$.

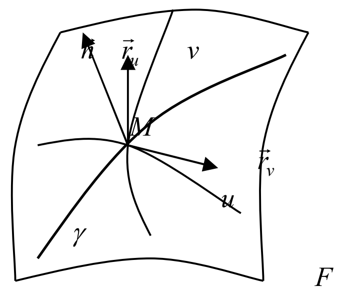
Məlumdur ki, səthin normal düz xəttinin $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ yönəldici vektorunun uzunluğu $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ ədədinə bərabərdir (bax, mühazirə 17, (20) düsturu). Ona görə də

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \qquad (3)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $\vec{n}$ vektoru hər bir (u,v) nöqtəsində F səthinin normal vektorudur.

$\vec{n}\vec{r}_u = \vec{n}\vec{r}_v = 0$ olduğundan, (2) bərabərliyini $\vec{n}$ vektoruna skalyar vur-maqla alarıq:

$$\vec{n}d^2\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_{uu}(du)^2 + 2\vec{n}\vec{r}_{uv}dudv + \vec{n}\vec{r}_{vv}(dv)^2\,. \qquad (4)$$



Şəkil 1

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

$$\vec{n}\vec{r}_{uu} = h_{11}, \vec{n}\vec{r}_{uv} = h_{12} = h_{21}, \vec{n}\vec{r}_{vv} = h_{22}\,. \qquad (5)$$

(3) bərabərliyinə əsasən (5) düsturlarını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$h_{11} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}, h_{12} = h_{21} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}, h_{22} = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}. \qquad (6)$$

(6) düsturlarındakı kəsrlərin surətlərindəki ifadələr göstərilən vektorların qarışıq törəmələridir. Nəticədə (4) bərabərliyi aşağıdakı kimi yazılar:

$$\vec{n} \cdot d^2\vec{r} = h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2\,. \qquad (7)$$

(7) bərabərliyinin sağ tərəfi F səthinə M nöqtəsində toxunan müstəvidə təyin olunmuş kvadratik formadır.

$$\varphi_2 = h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2$$

kvadratik formasına *səthin ikinci kvadratik forması* deyilir. Yalnız müs-təvi üzərində yerləşən səthlər üçün bu kvadratik forma eynilik kimi sıfra bərabərdir (belə səthin hər bir nöqtəsində $h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0$ olur).

İkinci kvadratik forma əmsalları (6) düsturları ilə hesablanırlar. $\vec{n}\vec{r}_u = \vec{n}\vec{r}_v = 0$ şərtləri ikinci kvadratik forma əmsallarının hesablan-masının (6) düsturlarından fərqli düsturlarını müəyyən etməyə imkan verir. Doğrudan da, əgər $\vec{n}\vec{r}_u = 0$ bərabərliyini əvvəlcə u parametrinə görə, sonra isə v parametrinə görə diferensiallasaq, alarıq:

$$\vec{n}_u\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uu} = 0, \quad \vec{n}_v\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uv} = 0,$$

və ya

$$h_{11} = -\vec{n}_u\vec{r}_u, \quad h_{12} = -\vec{n}_v\vec{r}_u\,, \qquad (8)$$

burada $\vec{n}_u = \dfrac{\partial\vec{n}}{\partial u}, \vec{n}_v = \dfrac{\partial\vec{n}}{\partial v}$. Digər tərəfdən, $\vec{n}\vec{r}_v = 0$ bərabərliyini u və v parametrlərinə görə diferensiallamaqla

$$h_{21} = -\vec{n}_u\vec{r}_v, \quad h_{22} = -\vec{n}_v\vec{r}_v \qquad (9)$$

düsturlarını alırıq.

$\vec{r}$ və $\vec{n}$ vektorlarının diferensiallarının $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ və $d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$ ifadələrini, eyni zamanda $h_{12} = h_{21}$ şərti daxilində (8) və (9) düsturlarını nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$d\vec{n}d\vec{r} = (\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv)(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) =$$
$$-h_{11}(du)^2 - 2h_{12}dudv - h_{22}(dv)^2 = -\varphi_2\,.$$

Beləliklə,

$$\varphi_2 = -d\vec{n}d\vec{r} . \qquad (10)$$

2. Tutaq ki, (1) səthi üzərindəki γ xətti $u = u(s), v = v(s)$ daxili tənlikləri ilə verilmişdir, burada s – təbii parametrdir. γ xəttinə M nöqtəsində toxunan $\vec{\tau}$ vahid vektorunu təyin edək:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} . \qquad (11)$$

Frene düsturuna görə, $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{v}$ (bax, mühazirə 13, bənd 3), bu-rada k γ xəttinin M nöqtəsindəki əyriliyidir, $\vec{v}$ isə həmin nöqtədə baş normalın vahid vektorudur. (11) düsturundan yaza bilərik:

$$k\vec{v} = \vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2} . \qquad (12)$$

(12) bərabərliyini $\vec{n}$ vektoruna skalyar vuraq və (5) düsturlarını nəzərə alaq:

$$\vec{n}(k\vec{v}) = \frac{h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(du)^2}{ds^2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} . \qquad (13)$$

(13) bərabərliyinin sağ tərəfini $\gamma \subset F$ xəttinin M nöqtəsində *normal əyriliyi* adlandırırlar və k_n ilə işarə edirlər. Beləliklə, əgər $\theta = (\vec{n}\,\hat{,}\,\vec{v})$ işarə etsək, onda $k_n = \vec{n}(k\vec{v}) = k\cos\theta$.

F səthinin M nöqtəsindəki normalından keçən müstəvi ilə kəsişməsindən alınan xəttə bu səthin *normal kəsiyi* deyilir. Aşkardır ki, γ xətti F səthinin normal kəsiyi olduqda ya $\vec{n} = \vec{v}$, ya da $\vec{n} = -\vec{v}$ olur. Birinci halda $k_n = k$, ikinci halda isə $k_n = -k$ bərabərliyi ödənilir. Belə-liklə, normal kəsiyin normal əyriliyinin mütləq qiyməti bu kəsiyin M nöqtəsindəki əyriliyinə bərabərdir.

(13) bərabərliyini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$k_n = \frac{h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2}{g_{11}(du)^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}(dv)^2} . \qquad (14)$$

γ hamar xətt olduğundan, onun heç bir nöqtəsində du və dv diferensialları eyni vaxtda sıfra bərabər olmurlar. Müəyyənlik üçün $dv \neq 0$ qəbul edək. $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ bərabərliyindən alınır ki, $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$

toxunan müstəvisində M nöqtəsində γ xəttinə toxunan düz xəttinin istiqaməti $\lambda = \frac{du}{dv}$ nisbəti ilə təyin olunur. Əgər (14) bərabərliyinin surət və məxrəcini $(dv)^2$ – na bölsək, alarıq:

$$k_n = \frac{h_{11}\lambda^2 + 2h_{12}\lambda + h_{22}}{g_{11}\lambda^2 + 2g_{12}\lambda + g_{22}} . \qquad (15)$$

(15) bərabərliyi göstərir ki, *$\gamma \subset F$ xəttinin M nöqtəsində nor-mal əyriliyi yalnız toxunanın istiqamətindən asılıdır.* Ona görə də, *səthin M nöqtəsindən keçən və bu nöqtədə ortaq toxunanı olan bütün hamar xətlərinin M nöqtəsində eyni normal əyriliyi vardır.*

3. Tutaq ki, F hamar səthi $z = f(x, y)$ tənliyi ilə verilmişdir. Bilirik ki, bu halda F səthi $x = u, y = v, z = f(u, v)$ parametrik tənliklərinə malik olur. Koordinat vektorları $\vec{r}_u = \vec{r}_x = (1,0, f_x)$ və $\vec{r}_v = \vec{r}_y = (0,1, f_y)$ şəklində təyin olunduqlarından,

$$\vec{r}_{uu} = (0,0, f_{xx}),\ \vec{r}_{uv} = (0,0, f_{xy}),\ \vec{r}_{vv} = (0,0, f_{yy}) . \qquad (16)$$

Koordinat vektorlarının vektorial hasilini təyin edək:

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \left(\begin{vmatrix} 0 & f_x \\ 1 & f_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_x & 1 \\ f_y & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-f_x, -f_y, 1) . \qquad (17)$$

(16) düsturundan alınır ki, F səthinin vahid normal vektoru

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\left|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\right|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \qquad (18)$$

koordinatlarına malikdir.

(16) və (18) bərabərliklərini nəzərə almaqla (5) düsturlarının köməyi ilə ikinci kvadratik forma əmsallarını təyin edək:

$$h_{11} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \; h_{12} = h_{21} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \; h_{22} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}. \quad (19)$$

Mühazirə 14

DÜPEN İNDİKATRİSASI. SƏTHİN VERİLMİŞ NÖQTƏSİNDƏ BAŞ İSTİQAMƏTLƏR. BAŞ, ORTA VƏ TAM ƏYRİLİKLƏR

1. Tutaq ki,

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad (1)$$

tənliyi ilə hamar F səthi verilmişdir. F səthinin ixtiyari M nöqtəsinə baxaq. Fərz edək ki, M nöqtəsində ikinci kvadratik formanın h_{11}, h_{12}, h_{22} əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir (əks halda M nöqtəsindən keçən ixtiyari xəttin normal əyriliyi sıfra bərabər olardı, bax, mühazirə 18, (14) düsturu).

F səthi üzərində yerləşən və M nöqtəsindən keçən elə xətlərə baxaq ki, onların M nöqtəsindəki toxunanları müxtəlif olsun. Bu xətlərin normal əyrilikləri arasındakı əlaqəni müəyyən edək. F səthinin $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ toxunan müstəvisində mərkəzi M nöqtəsində olan Ω düz xətlər dəstəsini nəzərdən keçirək. Ω dəstəsinin hər bir düz xətti üzərində M nöqtəsindən hər iki tərəfdə uzunluğu $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$ ədədinə bərabər olan parçalar ayıraq, burada $k_n -$ səth üzərində verilmiş düz xəttin toxunanı olduğu xəttin sıfırdan fərqli normal əyriliyidir.

Yuxarıdakı qayda ilə ayırdığımız parçaların uc nöqtələrinin (M nöqtəsindən fərqli) əmələ gətirdiyi xəttə səthin M nöqtəsində *əyrilik indikatrisası* (və ya *Düpen indikatrisası*) deyilir. $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ toxunan müstəvisində $M\vec{r}_u\vec{r}_v$ afin koordinat sistemini daxil edək və M nöqtəsin-də Düpen indikatrisasının tənliyini çıxaraq. Tutaq ki, $P(x,y) -$ Düpen indikatrisasının ixtiyari nöqtəsidir, $\vec{\tau} - MP$ düz xəttinin vahid yönəldici vektorudur, $u = u(s), v = v(s) -$ səth üzərində $\vec{\tau}$ vektorunun M nöqtə-sində vahid toxunan vektoru olduğu müəyyən hamar xəttin daxili tənlikləridir, $s -$ təbii parametrdir. Onda qurmaya əsasən,

$$\overrightarrow{MP} = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \vec{\tau}. \quad (2)$$

$\overrightarrow{MP}$ vektoru M nöqtəsinin radius-vektoru olduğundan,

$$\overrightarrow{MP} = x\vec{r}_u + y\vec{r}_u. \quad (3)$$

Digər tərəfdən, $\vec{\tau}$ vektoru aşağıdakı ayrılışa malikdir:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}. \quad (4)$$

(3) və (4) düsturlarını (2) bərabərliyində nəzərə alaq:

$$x\vec{r}_u + y\vec{r}_u = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} \right). \quad (5)$$

$\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorları kollinear olmadıqlarından, (5) bərabərliyindən yaza bilərik:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{du}{ds}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{dv}{ds}. \quad (6)$$

Normal əyriliyin $k_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ ifadəsini aşağıdakı kimi çevirək:

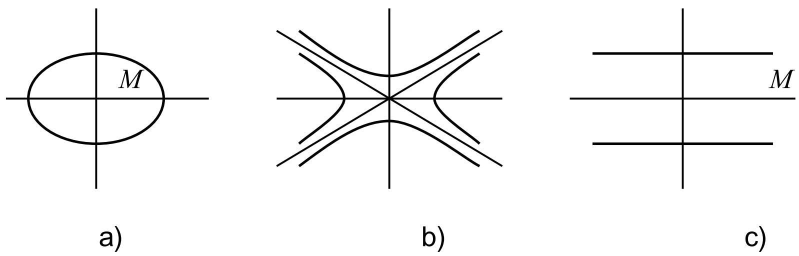
$$k_n = h_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2h_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + h_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \quad (7)$$

(7) bərabərliyində $\frac{du}{ds}$ və $\frac{dv}{ds}$ törəmələrinin (6) bərabərliklərin-dən olan ifadələrini nəzərə alıb, k_n – ə ixtisar etsək, M nöqtəsində Düpen indikatrisasının aşağıdakı tənliyini alarıq:

$$h_{11}x^2 + 2h_{12}xy + h_{22}y^2 = \pm 1. \qquad (8)$$

(8) tənliyində h_{11}, h_{12}, h_{22} - eyni vaxtda sıfra bərabər olmayan həqiqi ədədlər olduğundan, aşağıdakı hallar mümkündür:

1) $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 > 0$. (8) tənlikləri ilə ellips təyin olunur (şək. 1, a).



Şəkil 1

Bu halda M nöqtəsinə F səthinin *elliptik nöqtəsi* deyilir. Xüsusi halda,
Düpen indikatrisası çevrə olduqda M nöqtəsi *ombilik nöqtəsi* adlanır.

2) $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 < 0$. (8) tənlikləri ilə qoşma hiperbolalar cütü təyin olunur (şək.1, b). Bu halda M nöqtəsinə səthin *hiperbolik nöqtəsi* deyilir.

3) $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = 0$. (8) tənlikləri ilə paralel düz xətlər cütü təyin olunur(şək.1, c). Bu halda M nöqtəsi səthin *parabolik nöqtəsi* adlanır.

2. M nöqtəsində Düpen indikatrisasının baş istiqamətlərinə bu nöqtədə səthin *baş istiqamətləri* deyilir. F səthinin qeyri-ombilik nöq-təsində yeganə baş istiqamətlər cütü vardır. Ombilik nöqtəsində isə ixtiyari istiqamət baş istiqamətdir.

Tutaq ki, $M \subset F$ nöqtəsində baş istiqamətlər $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ və $\delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$ vektorları ilə təyin olunurlar. Analitik həndəsə kursundan ikitərtibli xəttin baş istiqamətlərinin tərifinə görə, $d\vec{r}$ və $\delta\vec{r}$ vektorları həm ortoqonaldırlar, həm də Düpen indikatrisasına nəzərən qoşmadırlar. Beləliklə, $d\vec{r}\delta\vec{r} = 0$ (ortoqonallıq şərti) və $h_{11}du\delta u + {} + h_{12}du\delta v + h_{21}dv\delta u + h_{22}dv\delta v = 0$ (qoşmalıq şərti) bərabərlikləri doğru-dur. Göstərək ki, qoşmalıq şərti $d\vec{n}\delta\vec{r} = 0$ şəklində yazıla bilər, burada $d\vec{n}$ normalın vahid vektorunun M nöqtəsinin səth üzərində $d\vec{r}$ yerdə-yişməsinə uyğun olan diferensialıdır. Bundan ötrü qoşmalıq şərtini ifadə edən bərabərliyin sol tərəfində ikinci kvadratik forma əmsallarını onların

$$h_{11} = -\vec{n}_u\vec{r}_u, h_{12} = h_{21} = -\vec{n}_v\vec{r}_u = -\vec{n}_u\vec{r}_v, h_{22} = -\vec{n}_v\vec{r}_v$$

düsturlarından olan ifadələri ilə əvəz edək:

$$-\vec{n}_u\vec{r}_u du\delta u - \vec{n}_u\vec{r}_v du\delta v - \vec{n}_v\vec{r}_u dv\delta u - \vec{n}_v\vec{r}_v dv\delta v = 0,$$

və ya

$$(\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv)(\vec{r}_u\delta u + \vec{r}_v\delta v) = 0 \Rightarrow d\vec{n}\delta\vec{r} = 0.$$

Beləliklə, $d\vec{r}$ və $\delta\vec{r}$ vektorlarının F səthinin M nöqtəsində baş istiqamətləri təyin etməsi üçün zəruri və kafi şərt bu vektorların

$$d\vec{r}\delta\vec{r} = 0 \text{ və } d\vec{n}\delta\vec{r} = 0 \qquad (9)$$

bərabərliklərini ödəməsidir.

(9) bərabərlikləri Rodriq teoremi adlanan aşağıdakı teoremi isbat etməyə imkan verir:

Teorem. (1) *səthinin M nöqtəsində $d\vec{r}$ istiqamətinin baş istiqamət olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$d\vec{n} = -kd\vec{r} \qquad (10)$$

bərabərliyinin ödənilməsidir, burada $d\vec{n}$ normialın vahid vektorunun M nöqtəsinin $d\vec{r}$ sürüşməsinə uyğun olan diferensialıdır, k isə $d\vec{r}$ istiqa-məti üzrə normal əyrilikdir.

İsbatı. Tutaq ki, $d\vec{r}$ vektorunun istiqaməti M nöqtəsində baş istiqamətdir. Onda (9) bərabərlikləri doğrudur, burada $\delta\vec{r}$ - M nöqtəsin-də digər baş istiqamətdir: $d\vec{r}\delta\vec{r} = 0$. $\vec{n}$ vahid vektor olduğundan, $\vec{n}_u$ və $\vec{n}_v$ xüsusi törəmələri onun özünə ortoqonaldırlar: $\vec{n}_u \perp \vec{n}, \vec{n}_v \perp \vec{n}$. Digər tərəfdən, $d\vec{n} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$ ayrılışından alınır ki, $d\vec{n}$ vektoru da $\vec{n}$ vek-toruna ortoqonaldır, yəni $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ toxunan müstəvisində yerləşir. Bu şərt daxilində (9) bərabərliklərindən müəyyən edirik ki, $d\vec{n}$ və dr vektorları kollineardırlar, yəni elə λ həqiqi ədədi vardır ki,

$$d\vec{n} = \lambda d\vec{r}\,. \tag{11}$$

İsbat edək ki, $\lambda = -k$. (11) bərabərliyini $\frac{d\vec{n}}{ds} = \lambda \frac{d\vec{r}}{ds}$ şəklində yazaq. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini $\frac{d\vec{r}}{ds}$ vektoruna vuraq və bu za-man $dnd\vec{r} = -\varphi_2, (ds)^2 = \varphi_1$ düsturlarını, eləcə də $\frac{d\vec{r}}{ds}$ vektorunun vahid vektor olması şərtini nəzərə alaq:

$$\frac{d\vec{n}}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{n}d\vec{r}}{(ds)^2} = \frac{-\varphi_2}{\varphi_1} = -k = \lambda \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds} = \lambda\,,$$

və ya $\lambda = -k$, burada k - $d\vec{r}$ istiqaməti üzrə normal əyrilikdir.

Tərsinə: tutaq ki, (10) bərabərliyi ödənilir. İsbat edək ki, $d\vec{r}$ baş istiqamət təyin edir. $(M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ toxunan müstəvisində $d\vec{r}$ istiqamətinə perpendikulyar olan $\delta\vec{r}$ istiqamətini götürək, onda $d\vec{r}\delta\vec{r} = 0$. $d\vec{n} = -kd\vec{r}$ olduğundan, $d\vec{n}\delta r = (-kd\vec{r})\delta\vec{r} = -k(d\vec{r}\delta\vec{r}) = 0$. Göründüyü kimi, (9) bərabərlikləri ödənilir, ona görə də $d\vec{r}$ vektorunun istiqaməti baş istiqa-mətdir.

(11) düsturuna *Rodriq düsturu* deyilir. M nöqtəsində baş istiqa-mətlər üzrə normal əyriliklə[redacted] bu nöqtədə *səthin baş əyrilikləri* deyilir. Buradan aydın olur ki, Rodriq teoremindəki k ədədi M nöqtəsində $d\vec{r}$ baş istiqaməti üzrə baş əyrilikdir. Səthin baş əyriliklərini k_1 və k_2 ilə işarə edirlər.

3. Rodriq düsturunu açıq şəkildə yazaq:

$$\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv = -k(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv). \tag{12}$$

(12) bərabərliyinin hər iki tərəfini əvvəlcə $\vec{r}_u$, sonra isə $\vec{r}_v$ vek-toruna skalyar vuraq:

$$\begin{aligned} \vec{n}_u\vec{r}_u du + \vec{n}_v\vec{r}_u dv &= -k(\vec{r}_u^{\,2} du + \vec{r}_v\vec{r}_u dv), \\ \vec{n}_u\vec{r}_v du + \vec{n}_v\vec{r}_v dv &= -k(\vec{r}_u\vec{r}_v du + \vec{r}_v^{\,2} dv). \end{aligned} \tag{13}$$

Əgər bu bərabərliklərdə birinci və ikinci kvadratik forma əmsallarının hesablanması düsturlarını nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$k = \frac{h_{11}du + h_{12}dv}{g_{11}du + g_{12}dv}, \quad k = \frac{h_{21}du + h_{22}dv}{g_{21}du + g_{22}dv}. \tag{14}$$

(14) bərabərliklərinin müqayisəsi göstərir ki,

$$\frac{h_{11}du + h_{12}dv}{g_{11}du + g_{12}dv} = \frac{h_{21}du + h_{22}dv}{g_{21}du + g_{22}dv},$$

və ya

$$\begin{vmatrix} h_{11}du + h_{12}dv & g_{11}du + g_{12}dv \\ h_{21}du + h_{21}dv & g_{21}du + g_{22}dv \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

(15) tənliyi baş istiqamətləri təyin edən tənlikdir. Bu tənliyin aşağıdakı yazılış formasından da istifadə olunur:

$$\begin{vmatrix} (dv)^2 & -dudv & (du)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Əgər səth üzərindəki γ xəttinin hər bir $M \in \gamma$ nöqtəsində toxu-nanının istiqaməti bu nöqtədə baş istiqamət olarsa, onda γ xəttinə *əyrilik xətti* deyilir. Tərifdən aydın olur ki, səthin istənilən qeyri-ombilik M nöqtəsindən bu nöqtədəki istiqamətləri ortoqonal və qoşma olan iki əyrilik xətti keçir. Aşkardır ki, (16) *tənliyi əyrilik xətlərinin diferensial tənliyidir.* Əgər F səthi üzərində u, v koordinat şəbəkəsi əyrilik xətlə-rindən ibarətdirsə, onda $g_{12} = 0$ (u və v xətləri hər bir $M \in F$ nöqtə-sində ortoqonal olduqlarına görə) və $h_{12} = 0$ (u və v xətlərinə toxu-nanlar hər bir M nöqtəsində Düpen indikatrisasına nəzərən qoşma olduqlarına görə).

4. (16) tənliklərini aşağıdakı kimi yazaq:

$$\begin{aligned}(h_{11}-kg_{11})du+(h_{12}-kg_{12})dv=0,\\ (h_{21}-kg_{21})du+(h_{22}-kg_{22})dv=0.\end{aligned} \quad (17)$$

Göründüyü kimi, (17) sistemi məchulları du və dv olan iki xətti bircins tənliklər sistemidir. $d\vec{r}\neq\vec{0}$ olduğuna görə, (17) sisteminin sıfır-dan fərqli həlli vardır, ona görə də bu sistemin determinantı sfra bəra-bərdir:

$$\begin{vmatrix} h_{11}-kg_{11} & h_{12}-kg_{12} \\ h_{21}-kg_{21} & h_{22}-kg_{22}\end{vmatrix}=0,$$

və ya

$$(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)k^2-(g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11})k+(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)=0. \quad (18)$$

Beləliklə, $M\in F$ nöqtəsində k_1,k_2 baş əyrilikləri (18) kvadrat tənliyinin kökləridir.

Baş əyriliklərin $H=\dfrac{k_1+k_2}{2}$ ədədi ortasına $M\in F$ nöqtəsində *səthin orta əyriliyi* deyilir. Baş əyriliklərin $K=k_1k_2$ hasili isə $M\in F$ nöqtəsində *səthin tam* (və ya *Qauss*) *əyriliyi* adlanır.

(18) kvadrat təyliyindən Viyet teoreminə əsasən orta və tam əyriliklərin aşağıdakı ifadələri alınır:

$$H=\frac{g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11}}{2(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)}, \quad (19)$$

$$K=\frac{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}. \quad (20)$$

$g_{11}g_{22}-g_{12}^2>0$ olduğuna görə (20) düsturundan müəyyən edirik ki, səthin elliptik nöqtələrində $K>0$, hiperbolik nöqtələrində $K<0$, parabolik nöqtələrində isə $K=0$ münasibəti ödənilir.

Mühazirə 15

SƏTHİN ASİMPTOTİK XƏTLƏRİ. SƏTHİN TÖRƏMƏ DÜSTURLARI

1. Hamar *səthin daxili həndəsəsinə* bu səthin və onun üzərindəki fiqurların yalnız birinci kvadratik formanın köməyi ilə təyin olunan xassələri aid edilir. Mühazirə 17-dən məlum olur ki, səth üzərində qövs uzunluğunun, xətlər arasındakı bucağın və səth sahəsinin hesablanması ilə bağlı məsələlər səthin daxili həndəsəsinə aid olan məsələlərdir.

Səthin daxili həndəsəsinə aid olan digər məsələləri öyrənək. İlk növbədə səthin törəmə düsturlarını çıxaraq.

Tutaq ki, $F-C^k\,(k\geq 3)$ sinifindən olan hamar səth olub,

$$\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2) \quad (1)$$

tənliyi ilə verilmişdir. Hər bir $M\in F$ nöqtəsində

$$\vec{r}_1=\vec{r}_{u_1}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1},\ \vec{r}_1=\vec{r}_{u_1}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1},\ \vec{n}=\frac{[\vec{r}_1,\vec{r}_2]}{|[\vec{r}_1,\vec{r}_2]|}$$

vektorları xətti asılı olmayan vektorlardır. Ona görə də M nöqtəsində $R_M=M\vec{r}_1\vec{r}_2\vec{n}$ reperi (koordinat sistemi) təyin olunur. Bu reperin koordinat vektorları aşağıdakı kimi seçilir: $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ vektorları səth üzərində koordinat şəbəkəsinin u^1,u^2 xətlərinə M nöqtəsində toxunan vektorlardır, $\vec{n}$ isə vahid vektor olub, M nöqtəsində səthə toxunan müstəviyə ortoqonaldır və elə istiqamətlənmişdir ki, $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{n}$ vektorları müsbət oriyentasiyalı bazis əmələ gətirirlər.

$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{n}$ bazisinin vektorlarının xüsusi törəmələrini, yəni

$$\vec{r}_{ij}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial u^j}=\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^i\partial u^j}=\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^j\partial u^i}=\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial u^i}=\vec{r}_{ji},\ \ \vec{n}_i=\frac{\partial\vec{n}}{\partial u^i}\quad (i,j=1,2)$$

vektorlarını bu bazisin vektorları üzrə ayırmaq mümkündür. Nəticədə aşağıdakı şəkildə olan düsturlar alınır:

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma^1_{ij}\vec{r}_1 + \Gamma^2_{ij}\vec{r}_2 + b_{ij}\vec{n} = \Gamma^k_{ij}\vec{r}_k + b_{ij}\vec{n}, \tag{2}$$

$$\vec{n}_i = b^1_i\vec{r}_1 + b^2_i r_2 = b^k_i\vec{r}_k. \tag{3}$$

Qeyd edək ki, (3) ayrılışında $\vec{n}$ vektorunun əmsalının sıfra bərabər olması $\vec{n}_i \perp \vec{n}$ şərti ilə bağlıdır.

2. (2) düsturundakı ayrılış əmsallarının ifadələrini edək. Əvvəlcə (2) bərabərliyinin hər iki tərəfini $\vec{n}$ vektoruna skalyar vuraq və $\vec{n} \perp \vec{r}_k, \vec{n}^2 = 1$ şərtlərini nəzərə alaq:

$$\vec{n}\vec{r}_{ij} = h_{ij} = \Gamma^k_{ij}(\vec{n}\vec{r}_k) + b_{ij}\vec{n}^2 = b_{ij},$$

və ya

$$b_{ij} = h_{ij}. \tag{4}$$

(4) bərabərliyindən göründüyü kimi, (2) düsturundakı b_{ij} əmsal-ları ikinci kvadratik forma əmsallarıdır.

Γ^k_{ij} ayrılış əmsallarını təyin etmək üçün (2) bərabərliyinin hər iki tərəfini $\vec{r}_l$ $(l = 1,2)$ vektoruna skalyar vuraq və $\vec{r}_k\vec{r}_l = g_{kl}$ olduğunu nə-zərə alaq (burada g_{kl} birinci kvadratik forma əmsallarıdır):

$$\vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_l = \Gamma^k_{ij}(\vec{r}_k\vec{r}_l) + h_{ij}(\vec{n}\vec{r}_l) = \Gamma^k_{ij}g_{kl}. \tag{4}$$

Digər tərəfdən, vektorların skalyar hasilinin diferensiallanması qayda-sına görə, yaza bilərik:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \partial_l g_{ij} = \partial_l(\vec{r}_i\vec{r}_j) = \vec{r}_{il} \cdot \vec{r}_j + \vec{r}_i \cdot \vec{r}_{jl}. \tag{5}$$

(5) bərabərliyinin sağ tərəfində (4)-ü nəzərə alaq:

$$\partial_l g_{ij} = \Gamma^k_{il}g_{kj} + \Gamma^k_{jl}g_{ki}. \tag{6}$$

(6) bərabərliyində l, i və j indekslərinin yerini ardıcıl olaraq iki dəfə dairəvi dəyişsək,

$$\partial_i g_{jl} = \Gamma^k_{ji}g_{kl} + \Gamma^k_{li}g_{kj}, \tag{7}$$

$$\partial_j g_{li} = \Gamma^k_{lj}g_{ki} + \Gamma^k_{ij}g_{kl}, \tag{8}$$

bərabərliklərini alarıq.

Aşkardır ki,

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}. \tag{9}$$

Doğrudan da, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{ji}$ bərabərliyində (2) düsturunu nəzərə almaqla yaza bilərik:

$$\Gamma^k_{ij}\vec{r}_k + h_{ij}\vec{n} = \Gamma^k_{ji}\vec{r}_k + h_{ji}\vec{n}. \tag{10}$$

$h_{ij} = h_{ji}$ olması səbəbindən (10) bərabərliyi

$$(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\vec{r}_k = \vec{0} \tag{11}$$

bərabərliyinə ekvivalentdir. $\vec{r}_k, k = 1,2$ vektorları kollinear olmadıqla-rından, (11) bərabərliyi (9) şərti daxilində ödənilir.

(7) və (8) bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplayıb, alınmış bəra-bərlikdən (6) bərabərliyini çıxaq və bu zaman (9) şərtini nəzərə alaq:

$$\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} = \Gamma^k_{ji}g_{kl} + \Gamma^k_{li}g_{kj} + \Gamma^k_{lj}g_{ki} + \Gamma^k_{ij}g_{kl} -$$
$$- \Gamma^k_{il}g_{kj} - \Gamma^k_{jl}g_{ki} = 2\Gamma^k_{ij}g_{kl},$$

və ya

$$2\Gamma^k_{ij}g_{kl} = \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}. \tag{12}$$

$g_{11}g_{22} - g^2_{12} > 0$ olduğuna görə, birinci kvadratik forma əmsallarından düzələn $\|g_{kl}\|$ matrisinin tərsi vardır. Tərs matrisin elementlərini g^{lp} ilə işarə etsək, yaza bilərik:

$$g_{kl}g^{lp} = \delta^p_k, \tag{13}$$

burada δ^p_k Kroneker simvoludur.

(12) bərabərliyinin hər iki tərəfini g^{lp} elementlərinə vuraq və (13) şərtini nəzərə alaq:

$$2\Gamma_{ij}^{k} g_{kl} g^{lp} = 2\Gamma_{ij}^{k}\delta_{k}^{p} = 2\Gamma_{ij}^{p} = g^{lp}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}),$$

və ya

$$\Gamma_{ij}^{p} = \frac{1}{2} g^{lp}(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \qquad (14)$$

(14) bərabərliyinin sağ tərəfi bəzi ədəbiyyatlarda II növ Kristoffel sim-volları adlandırılır və $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ şəklində işarə olunur. (14) bərabərliyinini sağ tərəfindəki mötərizənin daxilindəki ifadəyə isə I növ Kristoffel simvolu deyilir. (14) bərabərliyindən görünür ki, Γ_{ij}^{k} əmsallarının hesablanması daxili həndəsə məsələsidir.

(2) düsturu (4) və (14) şərtləri daxilində *Qauss düsturu* adlanır.

3. (3) dusturundakı b_i^k ayrılış əmsallarının hansı ifadəyə malik olduğunu araşdıraq. (3) bərabərliyinin hər iki tərəfini $\vec{r}_j$ vek-toruna skalyar vurub, $g_{kj} = \vec{r}_k \cdot \vec{r}_j$ və $h_{ij} = -\vec{n}_i \cdot \vec{r}_j$ olduğunu nəzərə, alsaq, yaza bilərik:

$$-h_{ij} = b_i^k g_{kj}. \qquad (15)$$

(15) bərabərliyinin hər iki tərəfini g^{jl} komponentlərinə vuraq:

$$-h_{ij} g^{jl} = b_i^k g_{kj} g^{jl} = b_i^k \delta_k^l = b_i^l,$$

və ya

$$b_i^l = -h_{ij} g^{jl} = -h_{i\cdot}^{l} = -h_i^l. \qquad (16)$$

Qeyd edək ki, (16) bərabərliyində j indeksi qaldırılmışdır (bax, mühazirə 4, bənd 3). (3) və (16) bərabərliklərindən

$$\vec{n}_i = -h_i^k \vec{r}_k \qquad (17)$$

düsturu alınır. (17) düsturuna *Veynharten düsturu* deyilir.

M nöqtəsi F səthi boyunca dəyişdikdə, R_M reper idə səth boyunca yerini dəyişir. Ona görə də R_M reperinə adətən səthin *hərəkətli reperi* deyilir. Qauss və Veynharten düsurlarına isə *F səthinin R_M hərəkətli reperinin törəmə düsturları* da deyilir.

4. İndi isə səthlər nəzəriyyəsinin əsas teormlərindən biri olan *Qauss teoremini* qeyd edək.

Teorem (Qauss). *C^k ($k \geq 3$) sinifindən olan hamar səthin tam əyriliyi yalnız birinci kvadratik forma əmsalları və onların törəmələri ilə ifadə olunur.*

İsbatı.

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k + h_{ij}\vec{n} \qquad (18)$$

Qauss düsturu F hamar səthinin hər bir nöqtəsində ödənildiyinə görə, bu düsturu səth üzərində eynilik kimi qəbul edərək, u^1 və u^2 dəyişənlərinə görə diferensiallamaq olar. (18) bərabərliyini u^k $(k = 1,2)$ dəyişəninə görə diferensiallayıb, (17) bərabərliyini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial u^k} &= \partial_k \partial_j \vec{r}_i = \partial_k(\Gamma_{ij}^s \vec{r}_s + h_{ij}\vec{n}) = \partial_k(\Gamma_{ji}^s \vec{r}_s + h_{ij}\vec{n}) = \partial_k \Gamma_{ji}^s \vec{r}_s + \Gamma_{ji}^s \partial_k \vec{r}_s + \\ &+ \partial_k h_{ij} + h_{ij}\partial_k \vec{n} == \partial_k \Gamma_{ji}^s \vec{r}_s + \Gamma_{ji}^s \Gamma_{sk}^l \vec{r}_l + \Gamma_{ji}^s h_{sk}\vec{n} + \partial_k h_{ij} - h_{ij} h_k^l \vec{r}_l. \end{aligned} \qquad (20)$$

(20) bərabərliyinin sağ tərəfində $\vec{r}_l$ və $\vec{n}$ vektorlarının əmsallarını qrup-laşdıraq:

$$\partial_k \partial_j \vec{r}_i = (\partial_k \Gamma_{ji}^l + \Gamma_{ji}^s \Gamma_{sk}^l - h_{ij} h_k^l)\vec{r}_l + (\Gamma_{ji}^s h_{sk} + \partial_k h_{ij})\vec{n}. \qquad (21)$$

Məlumdur ki, yüksək tərtib xüsusi törəmələrin alınması diferensiallama növbəsindən asılı deyil. Bu isə o deməkdir ki,

$$\partial_k \partial_j \vec{r}_i = \partial_j \partial_k \vec{r}_i. \qquad (22)$$

(21) bərabərliyinə əsasən $\partial_j \partial_k \vec{r}_i$ xüsusi törəməsinin aşağıdakı analoji ifadəsini yaza bilərik:

$$\partial_j \partial_k \vec{r}_i = (\partial_j \Gamma_{ki}^l + \Gamma_{ki}^s \Gamma_{sj}^l - h_{ik} h_j^l)\vec{r}_l + (\Gamma_{ki}^s h_{sj} + \partial_j h_{ik})\vec{n}. \qquad (23)$$

(22) bərabərliyində (21) və (22) ayrılışlarını nəzərə alıb, $\vec{r}_l$ vektorunun əmsallarını bərabərləşdirsək,

$$\partial_k \Gamma^l_{ji} - \partial_j \Gamma^l_{ki} + \Gamma^s_{ji}\Gamma^l_{sk} - \Gamma^s_{ki}\Gamma^l_{sj} = h_{ij}h^l_k - h_{ik}h^l_j \qquad (24)$$

münasibətinə gəlmiş olarıq.

$$R^l_{kji} = \partial_k \Gamma^l_{ji} - \partial_j \Gamma^l_{ki} + \Gamma^s_{ji}\Gamma^l_{sk} - \Gamma^s_{ki}\Gamma^l_{sj} \qquad (25)$$

şəklində işarələmə daxil etsək, (24) bərabərliyi belə yazılar:

$$R^l_{kji} = h_{ij}h^l_k - h_{ik}h^l_j\,. \qquad (25)$$

(25) bərabərliyindən görünür ki, R^l_{kij} kəmiyyətləri II növ Kristoffel simvolları və onların törəmələri ilə ifadə olunurlar. Bu isə onu göstərir ki, R^l_{kij} kəmiyyətlərinin hesablanması səthin daxili həndəsəsinə aiddir. (25) bərabərliyinin hər iki tərəfini g_{lp} əmsallarına vursaq, yaza bilərik:

$$R_{kjip} = h_{ij}h_{kp} - h_{ik}h_{jp}\,. \qquad (26)$$

(26) bərabərliyində $k = i = 1, j = p = 2$ qəbul etsək,

$$R_{1212} = h_{12}{}^2 - h_{11}h_{22} \qquad (27)$$

bərabərliyini alarıq. Məlumdur ki, səthin tam əyriliyi

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}{}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2} \qquad (28)$$

ifadəsinə malikdir (bax, mühazirə 19, bənd 4). (27) münasibətini (28)-də nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$K = \frac{-R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2}\,. \qquad (29)$$

(29) bərabərliyindən görünür ki, səthin tam əyriliyi yalnız birinci kvadratik forma əmsallarından və onların törəmələrindən asılıdır. ■